

Aufgabe 1 (*Bruchrechnung*) (4 Punkte)

Leiten Sie aus den Körperaxiomen für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c, d \neq 0$ her:

$$(1) \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

$$(2) \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$(3) \frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}, \quad \text{falls zusätzlich } b \neq 0.$$

Aufgabe 2 (*Maximum/Minimum*) (2 Punkte)

Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 3 (*Ungleichungen*) (4 Punkte)

Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 4 (*Induktion*) (6 Punkte)

a) Beweisen Sie für $n \geq 2$ die Ungleichung $n! < n^n$.

b) In der Vorlesung wurden die Binomialkoeffizienten eingeführt, und zwar ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{N}$ nach Definition

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^k \frac{\alpha - j + 1}{j}, \quad \text{sowie} \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Zeigen Sie durch Induktion die Formel

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha + k}{k} = \binom{\alpha + n + 1}{n}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 07.11.11 bis 12:00.**