Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang — 07.11.2011
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 *(Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)* (4 Punkte)
Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ mit $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq 1,$$

und diskutieren Sie den Fall der Gleichheit.

Aufgabe 2 *($\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$)* (3 Punkte)
Zeigen Sie: zu je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.

Aufgabe 3 *(Berechnung von Grenzwerten I)* (5 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen für $n \to \infty$ konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit kurzer Begründung).

a) $a_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n}$ b) $a_n = \frac{n^n}{n!}$ c) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

d) $a_n = n^{\frac{p}{q}}$ $\quad (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$. e) $a_n = n^p\, q^n$ $\quad (p \in \mathbb{N}, |q| < 1)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
a) *(Konvergenz von Mittelwerten)* Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten wir die Folge $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ der arithmetischen Mittelwerte der ersten n Folgenglieder. Zeigen Sie (wobei es günstig ist, zunächst $a = 0$ anzunehmen):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A_n = a.$$

Gilt die Umkehrung dieses Schlusses?
b) *(Konvergenz von Betrag und Minimum)*
Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Folgern Sie

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \min(a_n, b_n) = \min(a, b).$$

(Hierbei $\min(a,b) = \begin{cases} b, & \text{falls } a \geq b \\ a, & \text{falls } a < b \end{cases}$.)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 14.11.11 bis 12:00**.