Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 4
Prof. Dr. G. Wang — 14.11.2011
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |x|$ die Zahlenfolgen

$$E_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad F_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $E_n(x) \leq F_n(x)$.
b) $E_n(x) \leq E_{n+1}(x) \leq \ldots$.
c) $F_n(x) \geq F_{n+1}(x) \geq \ldots$.
d) $E_n(x) \leq F_m(x)$ für $n, m > |x|$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
a) Weisen Sie anhand der Definition die Cauchyfolgen-Eigenschaft nach:

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^3}.$$

b) Beweisen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 *(Potenzrechnung)* (4 Punkte)
a) Zeigen Sie, dass $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \ldots > 1$ für $a > 1$, und $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \ldots < 1$ für $0 < a < 1$.
b) Sei $x > 0$ und $q = k/m \in \mathbb{Q}$ mit $k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass durch $x^q := \sqrt[m]{x^k}$ die rationalen Potenzen von x wohldefiniert sind (also nicht von der Darstellung von q als Bruch abhängen). Beweisen Sie weiter für $x, y > 0$ und $q, r \in \mathbb{Q}$ die Regeln

$$(i)\ x^q x^r = x^{q+r} \quad (ii)\ (x^q)^r = x^{qr} \quad (iii)\ x^q y^q = (xy)^q.$$

Aufgabe 4 *(Mehrdeutigkeit der Dezimalbruchdarstellung)* (4 Punkte)
Wann stellen zwei unendliche Dezimalbrüche $k_0, k_1 k_2 \ldots$ und $m_0, m_1 m_2 \ldots$ dieselbe reelle Zahl dar?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 21.11.11 bis 12:00**.