Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 5
Prof. Dr. G. Wang — 21.11.2011
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 *(Folge mit vielen Häufungspunkten)* (4 Punkte)
Geben Sie eine Folge an, für die jedes $x \in [0,1]$ ein Häufungspunkt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $a_n > 0$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = q$. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = q.$$

Aufgabe 3 *(Berechnung von Grenzwerten II)* (4 Punkte)
Hier ist wieder die Konvergenz zu untersuchen:
a) $a_n = \sqrt[n]{n}$ b) $a_n = (1 - 1/n^2)^n$

Aufgabe 4 *(Rechenregeln für* $\limsup$*)* (4 Punkte)
Für beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

(i) $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty}(-a_n)$,
(ii) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Aufgabe 5 *(Ein Konvergenzprinzip)* (4 Punkte)
Über die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bekannt: es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so dass jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrerseits eine weitere Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ besitzt, die gegen a konvergiert. Dann konvergiert schon die ganze Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.
Hinweis: Beweis durch Widerspruch.

Es kommen die besten vier der fünf Aufgaben zur Anrechnung.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 28.11.11 bis 12:00**.