Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 6
Prof. Dr. G. Wang — 28.11.2011
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 *(Komplexe Zahlen)* (4 Punkte)

1. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, den Betrag sowie die konjugiert-komplexe Zahl zu
$$\frac{1}{1+i}\,; \quad \frac{2-i}{2+i}\,; \quad \frac{3+i}{1+2i}\,; \quad (2+i)^n, n \in \mathbb{Z}\,; \quad (\frac{1-i}{1+i})^n, n \in \mathbb{Z}\,.$$
2. Bestimmen Sie die Quadratwurzeln von i. (Sie finden alle Lösungen $x \in \mathbb{C}$ mit $x^2 = i$.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen?
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Welche der folgenden Reihen sind konvergent? Berechnen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

Aufgabe 4 *(Notwendige Bedingung für Konvergenz)* (4 Punkte)

Sei $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Nullfolge, und $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} p^k a_{p^k}$ konvergiert.

(2) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so folgt $\lim_{n\to\infty}(n a_n) = 0$.

(3) Ist $d(n)$ die Anzahl der Stellen in der Dezimaldarstellung von n, so ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d(n)^s n}$$
divergent für $0 \leq s \leq 1$ und konvergent für $s > 1$.

(Unter der Nullfolge versteht man eine Folge, die gegen 0 konvergiert.)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 5.12 bis 12:00**.