Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 7
Prof. Dr. G. Wang — 5.12.2011
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$x_n = \Big((-1)^n \frac{5\cdot 4^n + 1}{5^n - 1}\ ,\ (-1)^{n(n+1)/2}\frac{3n+1}{n^2+1} \Big)\ .$$

Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Folge (mit Beweis) und skizzieren Sie die ersten fünf Folgenglieder in einem Schaubild.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeichnen Sie die Menge

$$H = \{(x,y)\in\mathbb{C} : |z-2| - |z+2| \le 2\}.$$

Ist H beschränkt, abgeschlossen, offen in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ sei $\bar{M}$ die Menge der Punkte $x\in\mathbb{R}^n$, für die gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge $B_\varepsilon(x)\cap M$ nicht leer. $\bar{M}$ heißt der topologische Abschluß von M bezüglich der euklidischen Topologie. Zeigen Sie für beliebige $M\subset\mathbb{R}^n$:

1. $\bar{M}$ ist abgeschlossen.
2. Ist $A\subset\mathbb{R}^n$ abgeschlossen mit $M\subset A$, so gilt $\bar{M}\subset A$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Mengen $C_n\subset[0,1]$ der Zahlen x, die eine tri-adische Entwicklung $x = 0,k_1k_2\ldots$ erlauben mit $k_j\in\{0,2\}$ für $j\in\{1,\ldots,n\}$.

(i) Zeichnen Sie C_1 und C_2. Zeigen Sie für $x = 0,k_1k_2\ldots$ und $y = 0,m_1m_2\ldots$ mit $x,y\in C_n$ und $k_i\ne m_i$ für ein $i\le n$, daß $|x-y|\ge 3^{-n}$. Insbesondere sind für $x\in C_n$ die ersten n Ziffern $k_j\in\{0,2\}$ eindeutig bestimmt.

(ii) Zeigen Sie: $C=\bigcap_{n=1}^\infty C_n$ ist die Menge der Zahlen in $[0,1]$, die eine tri-adische Entwicklung mit den Ziffern 0 und 2 erlauben. Folgern Sie, dass C abgeschlossen ist.

(iii) Bestimmen Sie die Menge der Häufungspunkte von C.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag,12.12 bis 12:00**.