Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 12.12.2011
Dr. A. Magni

---

**Aufgabe 1** *(Stetigkeit der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$)* (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anhand der in der Vorlesung gegebenen Definition, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ stetig ist. Was ändert sich am Beweis für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$?

**Aufgabe 2** *(Stetigkeitspunkte)* (4 Punkte)

An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen stetig bzw. unstetig?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \text{ teilerfremd} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

**Aufgabe 3** *(Dichte Teilmengen und Stetigkeit)* (4 Punkte)

Seien $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie $f = g$, also $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

a) *(Existenz eines Fixpunkts)* Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass es eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$ gibt (eine solche Lösung heißt Fixpunkt von $f$). Finden Sie ein Gegenbeispiel, wenn das Intervall nicht abgeschlossen ist.

b) *(Monotonie und Invertierbarkeit)* Zeigen Sie: eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton (wachsend oder fallend) ist.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.* **Abgabe ist am Montag,19.12 bis 12:00**.