Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 9
Prof. Dr. G. Wang — 19.12.2011
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 *(Potenzfunktionen)* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $\alpha > 0$ die Funktion

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = x^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \log x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

streng monoton wachsend und stetig ist, und dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

Aufgabe 2 *(Sprungstellen monotoner Funktionen)* (4 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Nach Kap. 2, Lemma 3.1 der Vorlesung existieren für $x_0 \in (a, b)$ die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\searrow x_0} f(x) =: f_+(x_0)$ und $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) =: f_-(x_0)$. Zeigen Sie:

(1) f ist genau dann stetig in x_0, wenn $f_+(x_0) = f_-(x_0)$. Andernfalls heißt x_0 eine Sprungstelle mit Sprung $f_+(x_0) - f_-(x_0) > 0$.

(2) Die Menge der Sprungstellen von f ist abzählbar.

Hinweis: Sei $M \subset [0, +\infty)$. Es gebe ein $K \in [0, +\infty)$, so dass für jede endliche Teilmenge $\{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ gilt: $\sum_{i=1}^n x_i \le K$. Dann ist M abzählbar.

Aufgabe 3 *(Area Sinus hyperbolicus)* (4 Punkte)
Wir definieren die Funktion sinh (*Sinus hyperbolicus*) durch

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Begründen Sie, dass sinh eine Umkehrfunktion besitzt; diese wird mit Arsinh (*Area Sinus hyperbolicus*) bezeichnet. Leiten Sie die Formel $\operatorname{Arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ her.

Aufgabe 4 *(Eulersche Formel)* (4 Punkte)
Berechnen Sie mittels der Eulerschen Formel die Summen

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kt \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin kt \quad (t \notin 2\pi\mathbb{Z}).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 9.1.12 bis 12:00**.

Frohe Weihnachten!