Weihnachtsblatt zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12
Prof. Dr. G. Wang — 22.12.2011
Dr. A. Magni

Aufgabe 0 *(freiwillige Wiederholung: keine Abgabe)*
Stellen Sie die folgenden, für das weitere Verständnis wesentlichen Begriffe zusammen. Versuchen Sie, Beispiele und Gegenbeispiele zu finden, die *nicht* schon in der Vorlesung gegeben wurden.
Begriffe: Induktion, Betrag und Euklidische Norm, Konvergenz von Folgen (Nullfolgen, monotone Folgen, uneigentliche Konvergenz), Cauchyfolge, Teilfolge, beschränkte Folge und Häufungspunkt einer Folge, Limes inferior und superior, Intervallschachtelung, Bolzano-Weierstraß Auswahlsatz, Häufungspunkt einer Menge, Supremum/Infimum, Vollständigkeit im $\mathbb{R}^n$, offene und abgeschlossene Menge, ε-Umgebung, Stetigkeit (mit ε-δ und mit Folgen), Lipschitzstetigkeit, Grenzwert für Funktionen, linksseitige unf rechtsseitge Grenzwert, Umkehrfunktion, Maximum/Minimum.

Hinweise zur Bearbeitung:
Die Bearbeitungszeit beträg $2\frac{1}{2}$ **Stunden**. Sie dürfen keine Hilfsmittel benutzen. Die Lösungen werden am 9.1.2012 auf der Vorlesungswebseite erscheinen.

Aufgabe 1 *(keine Abgabe)* (20 Punkte)

a) (Keine Begründung) Bestimmen Sie Infimum, Supremum, Minmum und Maximum, falls diese existieren:

$$i) \quad M = \left\{ \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m^2}\right| \; n, m \in \mathbb{N} \right\} \qquad ii) \quad M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |2x| - |6 - 2x| > 0\}.$$

b) (Keine Begründung) Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte, den Limes Superior und den Limes Inferior der Folgen

$$i) \quad a_n = (-1)^n \frac{(-1)^n + 2n}{n} \qquad ii) \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

c) (Mit kürzer Begründung) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}.$$

d) (Mit kürzer Begrüdnung) Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgener Potenreihen:

$$i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n b^k z^n, a, b > 0, k \in \mathbb{N} \qquad ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} z^n.$$

e) Berechnen Sie

$$i) \quad \mathrm{Re}\frac{(2+3i)^3}{3+4i} \qquad ii) \quad \mathrm{Im}\left((5+2i)e^{5+2i}\right).$$

Aufgabe 2 *(keine Abgabe)* (24 Punkte)

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{n^n}{n!}, \qquad \text{für } n \geq 2.$$

b) Ist die Menge $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ vollständig? (In anderen Worten: ist jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ eine konvergente Folge?) Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $L = 1$. Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beispiele.

d) Weisen Sie mittels der Definition, dass die Folge

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

eine Cauchyfolge ist.

e) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\limsup_{n\to\infty} a_n > 1$. Zeigen Sie $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} < 1$.

f) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + Cx^2\sin(x) + 3x + 1$ mit $C \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f wenigstens eine (relle) Nullstelle hat.

Aufgabe 3 *(keine Abgabe)* (12 Punkte)

a) Gegeben sind reelle Zahlen a_n mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in N$. Zeigen Sie, dass die beiden unendlichen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

beide konvergieren oder beide divergieren.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert.

Frohe Weihnachten und guten Rustch ins neue Jahr!