LÖSUNGEN ZUM WEIHNACHTSBLATT

In diesem Skript, finden Sie ein bisschen mehr als Hinweise zu den Lösungen der Aufgaben des Weihnachtsblatts. Die Lösungen werden am Mittwoch 18. Januar im Weismann-Haus (Albertstr. 21a) um 14:00-16:00 Uhr gezeigt.

Aufgabe 1a i)
$\min(M) = \inf(M) = 0$, weil $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ und, falls $m = n = 1$, $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m^2}\right| = 0$.
$\sup(M) = 1$. M hat kein Maximum: $\forall n, m \in \mathbb{N}$, gilt $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m^2}\right| \leq \left|1 - \frac{1}{m^2}\right| < 1$.

Aufgabe 1a ii)
$\inf(M) = \frac{3}{2}$ und M hat kein Minimum. $\sup(M) = +\infty$, deshalb hat M kein Maximum in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1b i)
$\{+2, -2\}$ ist die Menge der Häufungspunkten der Folge. Folglich, $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +2$ und $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -2$.
Aufgabe 1b ii)
Nach der Bernoullischen Ungleichung, folgt $1 + \sqrt{n} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$. Hieraus folgt, dass die Menge der Häufungspunkte von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die leere Menge ist und dass $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Aufgabe 1c i)
Es gilt $\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{n^2}$. Dann, nach dem Vergleich mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, folgt, dass auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ konvergiert.

Aufgabe 1c ii)
Nach dem Kriterium von Leibnitz konvergiert die Reihe.

Aufgabe 1d i)
Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius $\frac{1}{a}$.

Aufgabe 1d ii)
Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius $+\infty$.

Aufgabe 1e i)
$-\frac{102}{25}$

Aufgabe 1e ii)
$e^5(5\sin 2 + 2\cos 2)$

Aufgabe 2a
Falls $n = 2$, $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = \frac{2^2}{2!} = 2$. Wir nehmen an, dass, für ein beliebiges $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n)^n}{n!}$ gilt. Dann gilt $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Aufgabe 2b
Nein: die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_n := \frac{\sqrt{2}}{n}$, gehört zu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und konvergiert gegen $0 \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2c
Nein: die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ist ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2d
Für alle $k \in \mathbb{N}$, es gilt $|a_n - a_{n+k}| \leq \frac{2}{n}$. Also, zu jedem $\varepsilon > 0$, ein $n_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon}$ existiert, sodass, für alle $n, m > n_\varepsilon$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt.

Aufgabe 2e
Sei $a := \limsup a_n > 1$, daraus folgt, dass es eine konvergente (bestimmt divergente) Teilfolge a_{n_k} gibt, mit $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = a$. Deshalb konvergiert die Folge $\frac{1}{a_{n_k}}$ gegen $\frac{1}{a} < 1$.

Aufgabe 2f
Für alle $C \in \mathbb{R}$, ist f stetig. Aus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, folgt, dass es ein $-\infty < x_0 < +\infty$ gibt, mit $f(x_0) = 0$.

Aufgabe 3a
Aus $a_n \geq 0$, folgt $a_n \geq \frac{a_n}{1+a_n}$. Folglich, falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ auch konvergent.
Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ konvergiert, ist $\frac{a_n}{a_n+1}$ eine Nullfolge. Hieraus folgt, dass es ein n_0 gibt, sodass $\frac{a_n}{a_n+1} \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Folglich, für $n \geq n_0$, $a_n \leq 1$ und $\frac{a_n}{2} \leq \frac{a_n}{a_n+1}$ gilt. Daraus, falls $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 3b
$\{a_{6n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $\{a_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, folglich, konvergieren die zwei Folgen gegen den gleichen Grenzwert a. $\{a_{6n+3}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $\{a_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, deswegen konvergieren $\{a_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert a. Hieraus folgt, dass $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. Deswegen konvergiert auch $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.