Probeklausur zur Analysis II SS 11/12

Prof. Dr. G. Wang
Dr. A. Magni

17.9.2012

Name: . . . . .Vorname: . . . .

Matr.Nr.: . . . .

Geburtsort: . . . . .Geburtstag: . . . .

Studiengang: . . . . .Semesterzahl: . . . .

Bitte Beachten Sie folgende Hinweise:

- Kennzeichen Sie alle Zettel mit Namen und Nummer der Aufgabe.
- Geben Sie alle Zettel, auch die mit Nebenrechnungen, gemeinsam mit dem vollständig ausgefüllten Deckblatt ab.
- Als Hilfsmittel sind nur Stifte zugelassen.
- Ein Täuschungsversuch kann zum sofortigen Ausschluss und Nichtbestehen der Klausur führen.
- Resultate aus der Vorlesung dürfen Sie als bekannt voraussetzen. Begründen Sie nach Möglichkeit stichwortartig Ihre Schritte.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei X die Menge aller reeller Zahlenfolgen. a) Man zeige, dass durch

$$d((a_n),(b_n)) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_i - b_i|}{1+|a_i-b_i|} \quad ((a_n),(b_n) \in X)$$

eine Metrik auf X definiert.
b) Zeigen Sie, dass X abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Untersuchen Sie erneut das Beispiel der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$f(0,0) \;=\; 0\,, \quad f(x,y) \;=\; \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\,, \quad \text{wenn} \quad x^2+y^2 > 0 \quad \text{gilt}\,,$$

und zeigen Sie:
a) f ist eine C^1-Funktion.
b) Die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$, aber sie besitzten im Nullpunkt verschiedene Werte.

Aufgabe 3 *(Taylorentwickung)* (4 Punkte)
Bestimmen Sie das Taylorpolynom um $(1,1)$ bis einschließlich der Terme zweiten Grades von $f(x,y) = x\exp(x-y)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ auf $\mathbb{R}^2$.
(a) Bestimmen Sie alle Extremstellen von f ohne Nebenbedingungen.
(b) Bestimmen Sie alle Extremstellen unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 5) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x) := \log(1 + \|x\|^2)x$.
a). Ist das Vektorfeld f rotationsfrei? (d.h. $\partial_i F_j = \partial_j F_i$?)
b). Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei γ_x die Verbindungsstrecke von 0 nach x. Bestimme $\displaystyle\int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx}$.
c). Besitzt F eine Stammfunktion? Bestimme gegebenenfalls eine solche.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das folgende Vektorfeld $F : \Omega \to R^2$ rotationsfrei ist, d.h.,

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i, \quad \forall i, j,$$

aber kein Stammfunktion in Ω hat. Woran liegt das?

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} + y \\ x - \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma z^n dz,$$

mit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. (*Fallunterscheidung von n!*)

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Sind folgende Funktionen holomorph (komplex differenzierbar) in ganz $\mathbb{C}$? Nachweis mit Cauchy-Riemann-Gleichungen!
(a) $f(z) = e^{-z^2}$. (b) $g(z) = z + z^3$.

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y,z) := z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1.$$

Man zeige, dass durch $f(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x,y) = (1,1)$ eine differenzierbare Funktion $z = g(x,y)$ mit $g(1,1) = 1$ implizit definiert ist und berechne die partiellen Ableitungen von g im Punkt (1,1).

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x' = \frac{1}{\cos(\frac{x}{t})} + \frac{x}{t}$$

durch die Substitution $y(t) = x(t)/t$.