

Aufgabe 1 (*Metrik*) (4 Punkte)

Es sei X die Menge aller reeller Zahlenfolgen.

(a) Man zeige, dass durch

$$d((a_n), (b_n)) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \quad ((a_n), (b_n) \in X)$$

eine Metrik auf X definiert wird.

(b) Sei $a_n = (a_{n,j})_{j \in \mathbb{N}} \in X$ eine Folge von Folgen und sei $b = (b_j)_{j \in \mathbb{N}} \in X$. Zeigen Sie, dass a_n genau dann bzgl. der Metrik d gegen b konvergiert, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b) = 0$, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = b_j$.

Aufgabe 2 (*Offene und abgeschlossene Teilmengen*) (4 Punkte)

(a) Die auf \mathbb{R}^n definierte 1-Norm und Maximumsnorm sind definiert durch

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Finden Sie die offene Kugeln $B_1(0)$ für die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_{\infty}$.

(b) Es sei X eine beliebige Menge. Dann wird durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

auf X eine Metrik definiert (d heißt *triviale Metrik* auf X). Man zeige, dass jede Teilmenge von X bzgl. dieser Metrik zugleich offen und abgeschlossen ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei X ein metrischer Raum und A, B zwei Teilmengen von X . Man zeige folgende Aussagen:

- (a) $\text{int } A \cap \text{int } B = \text{int } (A \cap B)$,
(b) $\text{int } A \cup \text{int } B \subset \text{int } (A \cup B)$. Gilt i.a. auch Gleichheit?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{|x|+y^2}}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Man prüfe, ob f in $(0, 0)$ stetig ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 30.4. bis 12:00.**