Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2012, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 2.7.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (*implizite Funktion*) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y, z) := z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1.$$

Man zeige, dass durch $f(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x, y) = (1, 1)$ eine differenzierbare Funktion $z = g(x, y)$ mit $g(1, 1) = 1$ implizit definiert ist und berechne die partiellen Ableitungen von g im Punkt (1,1).

Aufgabe 2 (*Untermannigfaltigkeit*) (4 Punkte)
Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x, y, z) := x^2 + xy - y - z, \quad g(x, y, z) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Man zeige, dass

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, und dass

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \varphi(t) = (t, t^2, t^3)$$

eine globale Parameterdarstellung von C ist.

Aufgabe 3 (*keine Untermannigfaltigkeit*) (4 Punkte)
Es sie $N : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$. Man zeige: Für $a \in N$, $a \neq (0, 0)$, hat T_aN die Dimension 1, dagegen hat $T_{(0,0)}N$ die Dimension 0. Man folgere, dass N keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 4 (*Lagrange-Multiplikator*) (4 +4 Punkte)
a) Man bestimme die Maxima und Minimima des Polynoms

$$f(x, y) = 4x^2 - 3xy$$

auf der Kreisscheibe $\overline{B} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(*Hinweis: Man berechne zunächst die lokalen Extrema von f im Innern von $\overline{B}$ und dann auf dem Rand von B, d.h. unter der Gleichungsnebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.*)
b) Die reelle Zahl $a > 0$ ist so in drei positive Summanden zu zerlegen, da deren Produkt maximal ist.
(*Hinweis: Man formuliere dies als eine Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen und benutze zu deren Lösung die Folgerung 2.2.*)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 9.7. bis 12:00**.