Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2012, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 9.7.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (*Untermannigfaltigkeit und ihr Tangemtialraum*) (4 Punkte)
Seien $M(n, \mathbb{R})$ die Menge aller reellen $n \times n$-Matrizen und $SL(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : \det(X) = 1\}$. Man zeige, dass
a) $SL(n, \mathbb{R})$ ist eine Untermannigfaltigkeit mit Dimension $n^2 - 1$.
b) $T_E SL(n, \mathbb{R}) = \{V \in M(n, \mathbb{R}) : \operatorname{spur}(V) = 0\}$.

Aufgabe 2 (*Legendretransformation*) (4 Punkte)
a) Bestimmen Sie die Legendretransformierte H von $L(x) = x^2/2$ auf $U = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ und die Legendretransformierte von H.
b) Sei $L : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion auf $U \subset \mathbb{R}^2$, für welche die zugehörige Legendretransformation (Gradientenabbildung)

$$f = DL : (x, y) \to (\xi, \eta) \text{ mit } \xi = L_x(x, y), \eta = L_y(x, y)$$

einen Diffoemorphismus von U nach V liefert, und bezeichne $H \in C^2(V)$ die Legendretransformierte von L. Man zeige:
i) $\rho := L_{xx}L_{yy} - L_{xy}^2 = \frac{1}{H_{\xi\xi}H_{\eta\eta} - H_{\xi\eta}^2}, \quad L_{xx} = \rho H_{\eta\eta}, \quad L_{xy} = -\rho H_{\xi\eta}, \quad L_{yy} = \rho H_{\xi\xi}$.
ii) Durch die Legendretransformation wird die Minimalflächengleichung

$$(1 + L_y^2)L_{xx} - 2L_xL_yL_{xy} + (1 + L_x^2)L_{yy} = 0$$

in die lineare Gleicheing $(1 + \xi^2)H_{\xi\xi} + 2\xi\eta H_{\xi\eta} + (1 + \eta^2)H_{\eta\eta} = 0$ transformeirt.

Aufgabe 3 (*Eindeutigkeit*) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Es gelte

$$f(-x, y) = -f(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Man beweise: Ist $r > 0$, so geht jede Lösung $\varphi : [-r, r] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ bei Spiegelung an der y-Achse in sich über.

Aufgabe 4 (*Picard-Lindelöf*) (4 Punkte)
Mit Hilfe des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens berechne man die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 16.7. bis 12:00**.