Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2012, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 16.7.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige und $g : J \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für die Differentialgleichung

$$x' = f(t)g(x), \quad (t, x) \in I \times J,$$

beweise man:
a) Sei $t_0 \in I$ und $x_0 \in J$ mit $g(x_0) = 0$. Dann ist die Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := x_0$ für alle $t \in I$ die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung mit $\varphi(t_0) = x_0$.
b) Sei $\varphi : I_1 \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung auf einem Intervall $I_1 \subset I$. Gilt $g(\varphi(t_1)) \neq 0$ für ein $t_1 \in I_1$, so ist $g(\varphi(t)) \neq 0$ für alle $t \in I_1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die in $I \times R^n$ global einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten $L \in \mathbb{R}_+$ genügt. Weiter seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $x' = f(\cdot, x)$. Sei $t_0 \in I$ und $\delta := |\varphi(t_0) - \psi(t_0)|$. Man zeige

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \delta e^{L|t-t_0|} \quad \text{für alle } t \in I.$$

(*Hinweis. Nach Satz 1.1 und Satz 1.3 (oder dem Beweis von Satz 1.3) gilt* $\|\varphi_k - \varphi\|_I \to 0$, *bzw* $\|\psi_k - \psi\|_I \to 0$ *mit* $k \to \infty$, *wobei* φ_k *und* ψ_k *sind definiert durch*

$$\varphi_{k+1}(t) = \varphi(a) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_k(s))ds, \ \ bzw., \ \psi_{k+1}(t) = \psi(a) + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi_k(s))ds.$$

Mit Induktion zeigen Sie zuerst:

$$|\varphi_k(t) - \psi_k(t)| \leq \delta \sum_{j=0}^{k} \frac{(L \cdot |t - t_0|)^j}{j}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ *und* $t \in I$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen, d.h. die Lösung durch einen beliebigen Punkt (t_0, x_0) des Definitionsbereichs.
a) $x' = e^x \cos t$,
b) $x' = \frac{1}{x}\sqrt{1 - x^2}$, $(0 < x < 1)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 23.7. bis 12:00**.