Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — SS 2012, Serie 2
Prof. Dr. G. Wang — 30.4.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (6 Punkte)
a) Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raumes (X, d) und B eine kompakte, zu A disjunkte Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass eine positive Zahl ε_0 existiert derart, dass $d(a, b) \geq \varepsilon_0$ für alle a in A und alle b in B.
b) Geben Sie im $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm ein Beispiel zweier disjunkter und abgeschlossener Mengen A und B an derart, dass zu jedem $\epsilon > 0$ Punkte $a \in A$ und $b \in B$ existieren mit

$$|a - b| \ < \ \epsilon\,.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Seien $f,\, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^6}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sie zeigen:
(a) f ist auf $\mathbb{R}^2$ beschränkt ist und g ist in jeder Umgebung von $(0,0)$ unbeschränkt.
(b) f is unstetig an der Stelle $(0,0)$, aber die Einschränkungen von f, sowie von g, auf jede beliebige Gerade in $\mathbb{R}^2$ sind stetig.
Sei $M \subset X$ und sei $f : X \to \mathbb{R}$. Die Einschränkung *von f auf M is definiert durch $h(x) = f(x)$ für alle $x \in M$.*

Aufgabe 3 (6 Punkte)
a) Man untersuche, an welchen Stellen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto y\sqrt{2x^2 + y^2}$$

(einmal) partiell differenzierbar ist und berechne dort ihre partiellen Ableitungen.
b) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man zeige, dass g überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$D_1 D_2 g(0,0) \neq D_2 D_1 g(0,0).$$

Ist g im Nullpunkt stetig?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 7.5.12 bis 12:00**.