Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2012, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang — 7.5.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben sei eine reelle Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall I. Beweisen Sie, dass die Funktion f genau dann stetig ist, wenn ihr Graph

$$\Gamma \;=\; \big\{\big(x, f(x)\big);\; x \in I\big\}$$

im $\mathbb{R}^2$ kompakt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei X die Menge aller reeller Zahlenfolgen mit der Metrik

$$d((a_n),(b_n)) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \quad ((a_n),(b_n) \in X).$$

Zeigen Sie, dass X abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist. (vgl. Aufgabe 1, Serie 1).

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Untersuchen Sie erneut das Beispiel der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$f(0,0) \;=\; 0\,, \quad f(x,y) \;=\; \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\,, \quad \text{wenn} \quad x^2+y^2 > 0 \quad \text{gilt}\,,$$

und zeigen Sie:
a) f ist eine C^1-Funktion.
b) Die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$, aber sie besitzten im Nullpunkt verschiedene Werte.
c) Es gilt mit $z = x + iy$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $f(x,y) \;=\; \frac{1}{4}\frac{Im z^4}{|z|^2}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
a) Berechnen Sie die Jacobimatrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r,\theta,\phi) := (r\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, r\cos\phi).$$

b) Sei $\Delta \;=\; \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$ der Laplaceoperator. Zeigen Sie, dass die Function $\varphi(x)$: $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} |x|^{2-n} & \text{falls } n > 2, \\ \log|x| & \text{falls } n = 2. \end{cases}$$

eine harmonische Funktion ist, d.h., $\Delta\varphi = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 12.5. bis 12:00**.