Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2012, Serie 4
Prof. Dr. G. Wang — 14.5.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,t) := t^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f,$$

wobei $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ der Laplaceoprator ist und $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > 0\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

An welchen Punkten ist f mit

$$f(x;y) := (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$ stetig partiell differenzierbar.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x_0 \in U$ und $f(x_0) =: a$. Man zeige, dass der Gradient $\operatorname{grad} f(x)$ auf der Niveaufläche

$$N_f(a) := \{x \in U : f(x) = a\}$$

senkrecht steht, d.h. folgendes gilt: Ist $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$, $\quad (\epsilon > 0)$ eine beliebige stetig differenzierbare Abbildung (Kurve) mit

$$c(0) = x_0 \text{ und } c((-\epsilon, \epsilon)) \in N_f(a),$$

so folgt

$$\langle \operatorname{grad} f(x_0), c'(0) \rangle = 0.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ die kritischen Punkte und ihre Hessematrix in jedem kritischen Punkt. Geben Sie ferner alle lokalen Extremstellen an:

a) $F(x,y) = \sin x - \sin y\,,$

b) $G(x,y) = \cos(x^2 + y^2)\,,$

c) $H(x,y) = x^2 + y^2 - \sin(x^2 + y^2)\,.$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 21.5. bis 12:00**.