Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2012, Serie 5
Prof. Dr. G. Wang — 21.5.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 *(Kriterium für positive Definitheit)* (4 Punkte)
Es sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. A ist genau dann positiv definit, wenn für jeden Index k mit $1 \le k \le n$ die als k-ter Hauptminor von A *bekannte Determinante* $A_k = \det(a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ *positiv ist.*

a) Unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten ist die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ positiv (oder negativ) definit, positiv (oder negativ) semidefinit bzw. indefinit?

b) Wann und nur wann ist die folgende reelle Matrix positiv definit:

$$A = \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 2 *(Extrema)* (4 Punkte)
a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch folgende Gleichung gegeben ist: $f(x,y) = (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2)$.
b) Untersuchen Sie die kritischen Punkte der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x,y) = (x^2 + 2y^2)\exp(-x^2 - 2y^2)$, und bestimmen Sie ihre lokalen Extrema.
c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $f(x,y) = \cos(xy)$ auf $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie dort ihre Hessematrix. Berechnen Sie die Extremstellen von f.

Aufgabe 3 *(Konvexität)* (4 Punkte)
Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $I = [a,b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex.
i) Ist f nicht konstant, so wird das Maximum von f nicht im Innern von I angenommen. Ist f zustzlich auch noch stetig, so nimmt f das Maximum auf einem Punkt $x \in \{a, b\}$ an.
ii) Ist f strikt konvex, so wird das Minimium von f in höchstens einem Punkt $x \in [a,b]$ angenommen. Ist f strikt konvex und stetig, so wird das Minimum in genau einem Punkt $x \in [a,b]$ angenommen.

Aufgabe 4 *(Taylorentwickung)* (4 Punkte)
Bestimmen Sie das Taylorpolynom um $(1,1)$ bis einschließlich der Terme zweiten Grades von $f(x,y) = x\exp(x - y)$.

Schöne Ferien!

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 4.6. bis 12:00**.