Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2012, Serie 6
Prof. Dr. G. Wang — 4.6.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in U$ ein Punkt. In einer Umgebung von x gelte

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \xi^\alpha + \varphi(\xi) \quad \text{und} \quad f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \tilde{c}_\alpha \xi^\alpha + \tilde{\varphi}(\xi)$$

mit $\varphi(\xi) = o(|\xi|^k)$ und $\tilde{\varphi}(\xi) = o(|\xi|^k)$. Man zeige, dass dann bereits $c_\alpha = \tilde{c}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt. ($\varphi(\xi) = o(|\xi|^k) \Leftrightarrow |\varphi(\xi)|/|\xi|^k \to 0$ mit $\xi \to 0$.)

Aufgabe 2 (*Parameterabhängige Integrale*) (4 Punkte)
Man berechne das Integral

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt$$

durch Differenzieren des Parameterabhängigen Integrals

$$F(y) := \int_0^x e^{-ty} dt.$$

Aufgabe 3 (*Parameterabhängige Integrale*) (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man zeige, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$f(y) := \int_0^1 g(x,y)dx \quad \text{und} \quad f^*(y) := \int_0^1 D_2 g(x,y)dx$$

wohldefiniert sind, und dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch $f'(0) \neq f^*(0)$ gilt.

Aufgabe 4 (*Logarithmische Spirale*) (4 Punkte)
Sei $0 \neq c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (e^{ct}\cos t, e^{ct}\sin t)$.
a) Sie skizzieren die Kurve für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $[-2\pi, 2\pi]$.
b) Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $f_{|[a,b]}$. Berechnen Sie $L_{a,b}$.
c) Existiert $\lim_{a\to-\infty} L_{a,b}$?
d) Zeigen Sie, dass die Funktion f jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und berechnen den Cosinus des Schnittwinkels.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 11.6. bis 12:00**.