Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2012, Serie 7
Prof. Dr. G. Wang — 11.6.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (*Parametersierung nach Bogenlänge*) (4 Punkte)
Parametrisieren Sie die Kurve

$$C(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^3/3 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

nach Bogenlänge s. Welcher Punkt entspricht der Länge $s = 1$?

Aufgabe 2 (*Kuvernintergral*) (4 Punkte)
Berechnen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 : (x) \mapsto \frac{1}{\|x\|^3}\, x$$

das Kurvenintegral über das sogenannte Vivianische Fenster

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Aufgabe 3 (*Stammfunktion*) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x) := \log(1 + \|x\|^2)x$.
a). Ist das Vektorfeld f ratationsfrei? (d.h. $\partial_i F_j = \partial_j F_i$?)
b). Fr $x \in \mathbb{R}^3$ sei γ_x die Verbindungsstrecke von 0 nach x. Bestimme $\displaystyle\int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx}$.
c). Besitzt F eine Stammfunktion? Bestimme gegebenenfalls eine solche.

Aufgabe 4 (*Stammfunktion*) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das folgende Vektorfeld $F : \Omega \to R^2$ rotationsfrei ist, d.h.,

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i, \quad \forall i, j,$$

aber kein Stammfunktion in Ω hat. Woran liegt das?

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} + y \\ x - \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 18.6. bis 12:00**.