Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2012, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 18.6.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (*Stammfunktion*) (4 Punkte)
Nutzen Sie Kurvenintegrale um eine Stammfunktion von $F : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{x} \\ 1 \\ \ln x \end{pmatrix}$$

zu finden. *Idee: wir zeigen zuerst, dass F ein Potential hat, und berechnen dann via Kurvenintegrale.*

Aufgabe 2 (*Divergenz*) (4 Punkte)
Es sei $\Omega \in R^n$ offen, und $F : \Omega \to R^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Unter der *Divergenz* von F im Punkt $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$ versteht man

$$\operatorname{div} F(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x).$$

a) Rechnen Sie die Divergenz und die Rotation von dem in Aufgaben 1 gegebenen Vektorfeld F.
b) Für jede Function $f \in C^2(\Omega)$ zeigen Sie

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f.$$

wobei Δ das Laplaceoperator ist.
c) Zeigei Sie, dass Für jedes Vektorfeld $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

Aufgabe 3 (*komplex differenzierbarkeit*) (4 Punkte)
Sind folgende Funktionen holomorph (komplex differenzierbar) in ganz $\mathbb{C}$? Nachweis mit Cauchy-Riemann-Gleichungen!
(a) $f(z) = e^{-z^2}$. (b) $g(z) = z + z^3$.

Aufgabe 4 (*komplexes Kurvenintegral*) (4 Punkte)
Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma z^n dz,$$

mit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. (*Fallunterscheidung von n!*)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 25.6. bis 12:00**.