Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2012, Serie 9
Prof. Dr. G. Wang — 25.6.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 (*holomorph*) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & \text{falls } z \neq 0, \\ 0, & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $z = 0$ partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemann-Gleichung erfüllen.
b) Zeigen Sie, dass f in $z = 0$ nicht komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (*Umkehrabbildung*) (4 Punkte)
Es sei $\Omega := \{x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \neq -1\}$ und die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 + x_1 + x_2 + x_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $Df(x_1, x_2, x_3)$.
b) Zeigen Sie, dass f auf Ω injektiv ist, bestimmen Sie $f(\Omega)$ und geben Sie die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ explizit an.
c) Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung f^{-1} auf $f(\Omega)$ differenzierbar ist und berechnen Sie ihre Ableitung.

Aufgabe 3 (*surjektiv und injektive*) (4+4 Punkte)
Sei f eine Abbildung

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

a) Man berechne die Jocobi-Matrix Df von f und, wo sie existiert, ihre Inverse. Man zeige, dass f surjektiv ist und dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ genau zwei Urbildpunkte besitzt.
b) f bildet $M = \overline{B_1(0)} \backslash \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ in sich ab, ist *local injektive* auf M (d.h., $\forall x_0 \in M$, $\exists \rho > 0 : f_{|B_\rho(x_0)}$ injektive), aber $f : M \to M$ ist nicht injektive.

Aufgabe 4 (*Diffeomorphismus*) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass durch

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

ein Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to B_1(0)$ gegeben ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 2.7. bis 12:00**.