Professor Dr. Katrin Wendland
Lehrstuhl für Analysis und Geometrie
Institut für Mathematik der Universität Augsburg

Dr. E. Scheidegger
Dr. E. Carberry
MMath O. Gray

Telefon: (0821) 598-2138/2140
Fax: (0821) 598-2458
E-mail: katrin.wendland@math.uni-augsburg.de
Postadresse:
D86135 Augsburg
Germany

Vorlesung im Sommersemester 2008

Einführung in die Theorie der Modulformen

Modulformen sind komplex-analytische Funktionen auf der oberen komplexen Halbebene, welche eine bestimmte Funktionalgleichung und eine Wachstumsbedingung im Unendlichen erfüllen. Letztere garantiert, dass Modulformen eine Art Fourierreihen-Entwicklung besitzen. Die Theorie der Modulformen gehört also in den Bereich der komplexen Analysis, aber ihre zentrale Bedeutung liegt in ihrem Zusammenhang zur Zahlentheorie. Daher resultieren auch die meisten ihrer Anwendungen.

Oft können Zählprobleme dadurch gelöst werden, indem man eine erzeugende Funktion aufstellt und deren Eigenschaften untersucht. In günstigen Situationen lässt sich dann zeigen, dass diese Funktion eine Modulform ist. Die Fourier-Koeffizienten sind dann die Lösung des Zählproblems. Daher rührt auch die Hauptanwendung von Modulformen in der Physik. Dort ist man an der Anzahl der Zustände eines quantenmechanischen Systems mit vorgegebenen Quantenzahlen interessiert. Diese werden durch die sogenannte Zustandssumme beschrieben, welche wiederum in günstigen Fällen eine Modulform ist.

Die wohl faszinierendste Anwendung der Theorie der Modulformen ist der Beweis von Fermats letztem Satz, der besagt, dass $a^n + b^n = c^n$ für $n > 2$ keine ganzzahlige Lösung außer $a=b=0$ besitzt. Zugrunde liegt die Tatsache, dass die komplexe Kurve $y^2 = x(x-a^n)(x-b^n)$ sehr viele Symmetrien besitzt und durch Modulformen eindeutig beschrieben werden kann. Solche Kurven heissen elliptische Kurven und sind das zentrale geometrische Objekt in der Theorie der Modulformen.

Diese elliptischen Kurven spielen auch im täglichen Leben eine immer bedeutendere Rolle: Die Verschlüsselungsalgorithmen in der Public Key Kryptographie basieren auf ganzzahliger Faktorisierung oder diskreten Logarithmen, wobei für beide Eigenschaften dieser Kurven ausgenutzt werden.

Das Ziel der Vorlesung ist es, eine elementare Einführung in die Konzepte der Modulformen und elliptischen Kurven zu geben mit Schwergewicht auf expliziten Rechnungen, während abstrakte Konzepte der Zahlentheorie weniger berücksichtigt werden.

Kenntnisse in Lineare Algebra I, II, Analysis I, II sowie grundlegende Kenntnisse in Riemannscher Geometrie und in komplexer Funktionentheorie sind nützlich, können aber ggf. in der Vorlesung nachgetragen werden.

Literatur:
Neil Koblitz, Introduction to elliptic curves and modular forms, Graduate Texts in Math. No. 97, Springer-Verlag, New York, 1984. Second edition, 1993.
Hershel Farkas, Irwin Kra, Theta Constants, Riemann Surfaces and the Modular Group, Graduate Studies in Mathematics, vol 37 American Mathematical Society, 2001.
Martin Eichler, Don Zagier, The Theory of Jacobi Forms. Birkhäuser, 1985

Interessenten ab dem 6. Semester wenden sich bitte an:

Dr. E. Scheidegger: emanuel.scheidegger@math.uni-augsburg.de (Tel.: 598-2158)

Dr. E. Carberry: emma.carberry@math.uni-augsburg.de (Tel.: 598-2205) oder an

MMath O. Gray: oliver.gray@math.uni-augsburg.de (Tel. 598-2256)