Dr. Emanuel Scheidegger
Mmath Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Modulformen
SS 07/08

Übungsblatt 1

1. $\mathbb{CP}^n$
   Der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ ist die Menge der Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{C}^{n+1}$. Wir identifizieren zwei Punkte $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$ auf einer Geraden, indem wir die Äquivalenzrelation $\sim$ dadurch definieren, dass $z \sim w$, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ gibt, so dass $z = \lambda w$. Dann sei

$$\mathbb{CP}^n = \left(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\right) / \sim \; .$$

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ mit $U_i = \{z = (z_1 : \ldots : z_{n+1}) \in \mathbb{CP}^n \mid z_i \neq 0\}$ und $\phi_i = \{\xi^1_{(i)}, \ldots, \widehat{\xi^i_{(i)}}, \ldots, \xi^{n+1}_{(i)}\} : U_i \to \mathbb{C}^n$ ein wohldefinierter Atlas ist, wobei $\xi^j_{(i)}(z) = z_j/z_i$ und $\widehat{\xi^i_{(i)}}$ bedeutet, dass $\xi^i_{(i)}$ weggelassen wird. Bestimmen Sie die Übergangsfunktionen $\psi_{ji} = \phi_j \phi_i^{-1}$.

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass eine elliptische Kurve E eine complexe Mannigfaltigkeit ist. Benutzen Sie dazu die Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen auf Mannigfaltigkeiten, um zu zeigen, dass E eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{CP}^2$ ist.

2. (a) (1 Punkt) Sei K ein Körper der Charakteristik $p = 0$. Sei $\widetilde{F}(x, y, z) \in K[x, y, z]$ homogen vom Grad n. Zeigen Sie, dass

$$x\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x} + y\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y} + z\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial z} \quad = \quad n\widetilde{F}$$

   (b) (1 Punkt) Sei C die Kurve $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid (F(x, y) = 0)\}$ und $\widetilde{C}$ ihre projektive Vervollständigung. Zeigen Sie, dass $\widetilde{C}$ im Punkt (x_0, y_0, z_0) genau dann nicht glatt ist, wenn

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial z} = 0$$

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Bedingung für einen glatten Punkt in Aufgabe (b) unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist, d.h. sie ist unverändert nach einem Koordinatenwechsel $(x', y', z') = A(x, y, z)$, wobei $A \in GL(3, K)$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass eine Tangente an $\widetilde{C}$ durch einen glatten Punkt (x_0, y_0, z_0) die Gleichung $ax + by + cz = 0$ erfüllt, wobei

$$a = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad b = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \quad c = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

indem Sie die Tangentenbedingung für C homogenisieren.

3. (a) (1 Punkt) Seien $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ zwei verschiedene Punkte im $K\mathbb{P}^2$. Zeigen Sie, dass die Gerade, die P_1 und P_2 verbindet, wie folgt parametrisiert werden kann: $\{sP_1 + tP_2 \mid (s,t) \in K\mathbb{P}^1\}$. Überprüfen Sie, dass diese lineare Abbildung $K\mathbb{P}^1$ (mit Koordinaten (s,t)) bijektiv auf die Gerade $\overline{P_1P_2} \subset K\mathbb{P}^2$ abbildet.

   (b) (2 Punkte) Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wenn die Kurve $F(x,y) = 0$ im Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ glatt ist und eine nicht-vertikale Tangente besitzt, dann kann die implizite Funktion $y = f(x)$ in eine Taylor-Reihe um $x = x_1$ entwickelt werden. Der lineare Term gibt die Tangente. Wenn wir den linearen Term subtrahieren, erhalten wir:

$$f(x) - y_1 - f'(x)(x - x_1) = a_m(x - x_1)^m + \dots, \quad a_m \neq 0$$

   m heisst die Ordnung der Tangente. Der Punkt (x_1, y_1) heisst Wendepunkt wenn $m > 2$, d.h. $f''(x_1) = 0$. Sei $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $z_1 \neq 0$ und sei $L = \overline{P_1P_2}$ eine Tangente an die Kurve $F(x,y) = \widetilde{F}(x,y,1)$ im glatten Punkt P_1. Sei $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Zeigen Sie, dass m die niedrigste Potenz von t in $\widetilde{F}(x_1 + tx_2, y_1 + ty_2, z_1 + tz_2) \in K[t]$ ist.

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass m sich unter linearen Koordinatenwechseln von $K\mathbb{P}^2$ nicht ändert.

4. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Gerade im Unendlichen $L = \{z = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ eine Tangente an die elliptische Kurve $C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = f(x)\}$ im Punkt $(0,1,0)$, und dass $(0,1,0)$ ein Wendepunkt von C ist.

Abgabetermin: Freitag, 25.04.2008 um 10:00 Uhr.