

Übungsblatt 10

37. (4 Punkte) Sei $N \in \{2, 3, 4, 6, 12\}$ und $k = \frac{12}{N}$. Zeigen Sie, dass $S_k(\Gamma(N)) = \mathbb{C} \cdot \Delta(N\tau)^{\frac{1}{N}}$.

38. Beweisen Sie die folgende Identitäten durch Manipulation von Potenzreihen und unendlichen Produkten in $q = e^{2\pi i\tau}$.

(a) (1 Punkt) $E_2\left(\tau + \frac{1}{2}\right) - E_2(\tau) = 48 \sum_{n>0, n \text{ ungerade}} \sigma_1(n)q^n$;

(b) (1 Punkt) $E_k(\tau) - (1+p^{k-1})E_k(p\tau) + p^{k-1}E_k(p^2\tau) = -\frac{2k}{B_k} \sum_{p \nmid n} \sigma_{k-1}(n)q^n$,
 $k \geq 2$, p eine Primzahl;

(c) (1 Punkt) $E_2(\tau) - 3E_2(2\tau) + 2E_2(4\tau) = \frac{1}{2}(E_2(\tau) - E_2\left(\tau + \frac{1}{2}\right))$;

(d) (1 Punkt) $\eta\left(\tau + \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{2\pi i}{48}} \frac{\eta^3(2\tau)}{\eta(\tau)\eta(4\tau)}$.

39. (a) (1 Punkt) Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 17(b) um zu zeigen, dass

$$(\eta(\tau)\eta(2\tau))^8 \in S_8(\Gamma_0(2)).$$

(b) (1 Punkt) Sei $f(\tau)$ eine Funktion mit Periode 1, die $f\left(-\frac{1}{4\tau}\right) = (-4\tau^2)^{\frac{k}{2}} f(\tau)$ für gerades k erfüllt. Zeigen Sie, dass $f|_k\gamma = f$ für alle $\gamma \in \Gamma_0(4)$.

(c) (2 Punkte) Benutzen Sie Aufgabe (a) und (b), sowie Aufgabe 38 um zu zeigen, dass

$$\frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4} \in M_2(\Gamma_0(4))$$

und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

40. (a) (1 Punkt) Für $a \in \mathbb{Z}$, zeigen Sie, dass

$$E_2(ST^{-a}S\tau) = (a\tau + 1)^2 E_2(\tau) + \frac{12a}{2\pi i}(a\tau + 1).$$

(b) (1 Punkt) Sei

$$F_2(\tau) = -\frac{1}{24}(E_2(\tau) - 3E_2(2\tau) + 2E_2(4\tau)) = \sum_{n>0, n \text{ ungerade}} \sigma_1(n)q^n$$

gemäß Aufgabe 38. Zeigen Sie, dass $F_2(\tau) \in M_2(\Gamma_0(4))$ ist und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $F_2(\tau) = \frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4}$. Leiten Sie daraus die Identität

$$q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n})^4 (1 + q^{2n})^4 = \sum_{n>0, n \text{ ungerade}} \sigma_1(n) q^n$$

her.

(d) (1 Punkt) Geben Sie einen anderen Beweis dafür, dass $-24F_2(\tau) = \frac{1}{2}(E_2(\tau) - E_2(\tau + \frac{1}{2}))$ in $M_2(\Gamma_0(4))$ ist, indem Sie ganz allgemein zeigen, dass $E_2(\tau) - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} E_2(\tau + \frac{j}{N}) \in M_2(\Gamma_0(N^2))$.

Abgabetermin: Dienstag, 24.06.2008 um 10:00 Uhr.