Dr. Emanuel Scheidegger
Mmath Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Modulformen
SS 07/08

Übungsblatt 11

41. Sei $g(\tau) = \theta(2\tau, 0)$ und $G_2(\tau) = g(\tau)^4$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $g(\tau) + g\left(\tau + \frac{1}{2}\right) = 2g(4\tau)$. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $G_2 \in M_2(\Gamma_0(4))$ und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass F_2 aus Aufgabe 40 und G_2 linear unabhängig sind.

    (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\frac{\eta(2\tau)^{20}}{\eta(\tau)^8\eta(4\tau)^8} \in M_2(\Gamma_0(4))$ und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

    (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $g(\tau) = \frac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2} = e^{-\frac{2\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2}{\eta(2\tau)}$.

42. Sei $F(2)$ der Fundamentalbereich von $\Gamma(2)$ aus der Vorlesung. Dann ist $F_0(4) = \alpha F(2)$, mit $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ein Fundamentalbereich für $\Gamma_0(4) = \alpha\Gamma(2)\alpha^{-1}$ (siehe Aufgabe 15). Der Rand von $F_0(4)$ besteht aus: 2 vertikalen Geraden von $(-3 + i\sqrt{3})/4$ bzw. $(1 + i\sqrt{3})/4$ nach ∞; 2 Kreisbögen vom Radius $1/2$ und Zentrum $-1/2$ bzw. 0; ein Kreisbogen vom Radius $1/6$ und Zentrum $1/6$, der sich von 0 nach $(9 + i\sqrt{3})/28$ erstreckt; und ein Kreisbogen vom Radius $1/10$ und Zentrum $4/10$, der sich von $(9 + i\sqrt{3})/28$ nach $1/2$ erstreckt.

    (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle elliptischen Punkte in $F_0(4)$, d.h. Punkte, die Γ_1-äquivalent zu i oder ω sind. Welche Punkte liegen am Rand und welche im Inneren?

    (b) (1 Punkt) Sei $f(\tau) \not\equiv 0$ eine meromorphe Modulform vom Gewicht k, $k \in 2\mathbb{Z}$ für $\Gamma_0(4)$. Sei $\nu_\tau(f)$ die Nullstellen- oder Polstellenordnung von f im Punkt τ. An eine Spitze $\kappa = \alpha^{-1} \cdot \infty$ definieren wir $\nu_\kappa(f)$ als die erste Potenz von q_h mit nicht-verschwindendem Koeffizienten in der Fourier-Entwicklung von $f|_k(\alpha^{-1})$ (wobei h der Verzweigungsindex aus Aufgabe 36 ist). Zeigen Sie, dass $\sum_{\tau \in \overline{F}_0(4)} \nu_\tau(f) = \frac{k}{2}$, wobei in der Summe nur ein Punkt in einer Menge von $\Gamma_0(4)$-äquivalenten Randpunkte berücksichtigt wird.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Nullstellen von F_2 aus Aufgabe 40 und G_2 aus Aufgabe 41.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass F_2 und G_2 $M_2(\Gamma_0(4))$ erzeugen.

43. (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $M_k(\Gamma_0(4)) = \{0\}$, falls $k < 0$ und $M_0(\Gamma_0(4)) = \mathbb{C}$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $k = 2k_0 \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ jedes $f \in M_k(\Gamma_0(4))$ als homogenes Polynom vom Grad k_0 in F_2 und G_2 geschrieben werden kann.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $G_2^2F_2 - 16G_2F_2^2$ $S_6(\Gamma_0(4))$ erzeugt. Benutzen Sie Aufgabe 37 und Proposition 4.14 um zu zeigen, dass $\eta(2\tau)^{12} = G_2^2F_2 - 16G_2F_2^2$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $k = 2k_0 \geq 6$ jedes $f \in S_k(\Gamma_0(4))$ als homogenes Polynom vom Grad k_0 in F_2 und G_2, dass durch $G_2F_2(G_2 - 16F_2)$ teilbar ist, geschrieben werden kann.

44. (4 Punkte) Benutzen Sie Propositionen 4.24 und 4.27 um zu zeigen, dass $(\eta(\tau)\eta(3\tau))^6 \in S_6(\Gamma_0(3))$ und dass $(\eta(\tau)\eta(7\tau))^3 \in S_3(7, \chi)$, wobei $\chi(n) = \left(\frac{n}{7}\right)$.

Abgabetermin: Dienstag, 01.07.2008 um 10:00 Uhr.