Dr. Emanuel Scheidegger
Mmath Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Modulformen
SS 07/08

Übungsblatt 12

45. Sei χ ein nicht-trivialer gerader primitiver Dirichlet-Charakter modulo N und definieren Sie

$$\theta(\chi, t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-\pi t n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n)^{-\pi t n^2}, \quad t > 0.$$

und

$$\vartheta_{a,b}(t) \;=\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi[(a+n)^2 t - 2ib(a+n)]}, \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass

i. $\theta(\chi, t) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} \chi(a)\, \vartheta_{a/N,0}(N^2 t)$;

ii. $\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} \chi(a)\, \vartheta_{0,a/N}(t) = g(\chi)\, \theta(\overline{\chi}, t)$;

iii. $\theta(\chi, t) = \frac{g(\chi)}{\sqrt{N^2 t}} \theta\left(\overline{\chi}, \frac{1}{N^2 t}\right)$,

wobei $g(\chi)$ die Gauss-Summe von χ ist.

(b) (1 Punkt) Sei jetzt χ der Charakter modulo 12, so dass $\chi(\pm 1) = 1$, $\chi(\pm 5) = -1$ und definieren Sie $\tilde{\eta}(\tau) = \theta(\chi, -i\tau/12)$ für $\tau \in \mathbb{H}$. Dann gilt $\tilde{\eta}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, \tilde{\eta}(\tau)$. Zeigen Sie, dass $\tilde{\eta}(\tau + 1) = e^{\frac{2\pi i}{24}} \tilde{\eta}(\tau)$, und dass $\tilde{\eta}^{24} \in S_{12}(\Gamma_1)$.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\tilde{\eta}(\tau) = \eta(\tau)$.

(d) (1 Punkt) Eine ganze Zahl der Form $(3n^2 + n)/2$ heisst Pentagonalzahl. Beweisen Sie Eulers Pentagonalzahlenidentität,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m),$$

indem Sie die Gleichung in (c) als eine Identität zwischen formalen Potenzreihen in q schreiben.

46. (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das Bild eines 3-Torsionspunkt von $E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ unter der Abbildung $\phi_3\colon E_\tau \to \mathbb{CP}^2$ ein Wendepunkt der Kubik aus Aufgabe 23 ist. Bestimmen Sie die projektiven Koordinaten dieser Punkte.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das Bild eines 2-Torsionspunkt der Kubik aus den 4 Punkten $[0:1:-1], [1:\alpha:\alpha]$ besteht, wobei α eine Lösung der kubischen Gleichung $2t^3 - 3at^2 + 1 = 0$ ist.

47. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass der Parameter a in der Kubik aus Aufgabe 23 gleich der folgenden Funktion in τ ist:

$$a(\tau) \quad = \quad \frac{\vartheta_{00}(0,3\tau)^3 + q^{\frac{1}{2}}\vartheta_{00}(\tau,3\tau)^3 + q^2\vartheta_{00}(2\tau,3\tau)^3}{3q^{\frac{5}{6}}\vartheta_{00}(0,3\tau)\vartheta_{00}(\tau,3\tau)\vartheta_{00}(2\tau,3\tau)}$$

48. (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Thetanullwerte $\vartheta_{a,b}$ sich höchstens um einen konstanten Faktor ändern, wenn man a und b um eine ganze Zahl abändert. Leiten Sie aus der Jocobischen Thetatransformationsformel die Thetatransformationsformel

$$\vartheta_{a,b}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \quad = \quad e^{6\pi iab}\sqrt{\frac{\tau}{i}}\vartheta_{b,-a}(\tau)$$

ab.

(b) (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Wir betrachten alle Paare ganzer Zahlen (a,b), $0 \leq a,b < 2n$, mit Ausnahme des Paares $(a,b) = (n,n)$ und bilden die Funktion

$$\Delta_n(\tau) \quad = \quad \prod_{\substack{(a,b)\neq(n,n)\\ 0\leq a,b<2n}} \vartheta_{\frac{a}{2n},\frac{b}{2n}}(\tau).$$

Zeigen Sie, dass $\Delta_n^{24} = C\Delta^{4n^2-1} \in S_{12(4n^2-1)}(\Gamma_1)$ und bestimmen Sie C.

Abgabetermin: Dienstag, 08.07.2008 um 10:00 Uhr.