Dr. Emanuel Scheidegger
Mmath Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Modulformen
SS 07/08

Übungsblatt 13

49. Eine reelle symmetrische Matrix S vom Rang n heisst positiv, falls für $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $x^T S x > 0$. Eine reelle symmetrische Matrix S vom Rang n heisst ganz, falls für $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt, dass $x^T S x \in \mathbb{Z}$, und heisst gerade, falls $x^T S x \in 2\mathbb{Z}$. Eine invertierbare Matrix U heisst unimodular, falls sowohl U als auch U^{-1} ganzzahlig sind. Jeder positiven Matrix S kann eine Thetareihe zugeordnet werden, $\Theta_S(\tau) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \exp\left(i\pi x^T S x \tau\right)$. Falls S gerade ist, dann hat $\Theta_S(\tau)$ Periode 2 und eine Fourier-Entwicklung der Form $\Theta_S(\tau) = \sum_{m=0} A_S(m) \exp(i\pi m\tau)$. Dabei bezeichnet $A_S(m) = \left|\left\{x \in \mathbb{Z}^n | x^T S x = m\right\}\right|$ die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl m durch die quadratische Form S.

    (a) (1 Punkt) Sei S eine positive Matrix vom Rang n. Zeigen Sie, dass gilt:
    $$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\tau}{i}}^n \sqrt{\det S} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \exp\left(i\pi (x+w)^T S (x+w)\tau\right) \\ = & \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \exp\left(i\pi \left(x^T S^{-1} x \left(-\frac{1}{\tau}\right) + 2x^T w\right)\right). \end{aligned}$$

    (b) (1 Punkt) Sei S eine positive und unimodulare Matrix vom Rang n. Zeigen Sie, dass gilt $\Theta_S\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^n \sqrt{\det S}\, \Theta_S(\tau)$.

    (c) (1 Punkt) Sei S eine positive gerade und unimodulare Matrix vom Rang $n \in 8\mathbb{N}$. Dann ist $\Theta_S(\tau) \in M_{\frac{n}{2}}(\Gamma_1)$.

    (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Cartan–Matrix der Lie–Algebra E_8 eine positive gerade und unimodulare Matrix vom Rang 8 ist und zeigen Sie, dass gilt: $\Theta_{\mathrm{E}_8}(\tau) = E_4(\tau)$.

50. (4 Punkte) Drücken Sie die Eisensteinreihen E_4 und E_6 als Polynome in den Jacobi–Thetakonstanten θ_2, θ_3 und θ_4 aus.

51. Sei $\Gamma_\vartheta = \langle \pm S, T^2 \rangle$ die Heckegruppe oder Thetagruppe aus den Aufgaben 16 und 17.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Funktion $e_k(\tau) = E_k\left(\frac{1}{2}(\tau+1)\right)$ für $k > 2$ den Transformationsformeln $e_k(\tau+2) = e_k(\tau)$ und $e_k(-\frac{1}{\tau}) = \tau^k e_k(\tau)$ genügt.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass gilt: $E_4\left(\frac{1}{2}(\tau+1)\right) \in M_4(\Gamma_\vartheta)$, und bestimmen Sie ihre Werte an den Spitzen.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\vartheta^8(\tau) = \frac{1}{15}\left(16E_4(\tau) - E_4\left(\frac{1}{2}(\tau+1)\right)\right)$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A_8(n) = \left|\left\{x \in \mathbb{Z}^8 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{8} {x_i}^2 = n\right\}\right| = 16 \sum_{\substack{d|n \\ 1\leq d\leq n}} (-1)^{n-d} d^3.$$

Dies ist Jacobis Formel für die Anzahl Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von acht Quadraten.

52. (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $4E_2(2\tau) - E_2(\tau/2) \in M_2(\Gamma_\vartheta, \chi)$ mit $\chi(T^2) = 1, \chi(S) = -1$ und bestimmen Sie ihre Werte an den Spitzen.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\vartheta^4(\tau) = \frac{1}{3}\left(E_2(2\tau) - E_2(\tau/2)\right)$ gilt.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A_4(n) = \left|\left\{x \in \mathbb{Z}^4 \,\middle|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = n\right\}\right| = 8 \sum_{\substack{4\nmid d|n \\ 1\leq d\leq n}} d.$$

Dies ist Jacobis Formel für die Anzahl Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von vier Quadraten.