Dr. Emanuel Scheidegger
Mmath Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Modulformen
SS 07/08

Übungsblatt 2

5. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass zwei Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ und $L' = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$ genau dann übereinstimmen, wenn es eine ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Determinate ± 1 mit Eigenschaft

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

gibt.

6. (a) (1 Punkt) Sei u fest. Zeigen Sie, dass die elliptische Funktion $\wp - u$ genau zwei Nullstellen (oder eine doppelte Nullstelle) hat.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Nullstellen der Funktion $\wp'$ genau $e_1 := \omega_1/2$, $e_2 := \omega_2/2$ und $e_3 := (\omega_1 + \omega_2)/2$ sind. Geben Sie eine Charakterisierung der Nullstellen von $\wp'$ an, die unabhängig von der Wahl der Basis von L ist, d.h. unabhängig von den Perioden ω_1, ω_2 ist.

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass e_1, e_2, e_3 genau die Werte von u sind, für die $\wp - u$ eine doppelte Nullstelle hat.

   (d) (1 Punkt) Warum sind e_1, e_2 und e_3 voneinander verschieden?

7. Sei $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ein festes Gitter und seien $g_2 = g_2(L)$, $g_3 = g_3(L)$, $\wp(z) = \wp(z; L)$. Sei R_1 eine unbeschränkte einfach zusammenhängende offene Teilmenge der komplexen Ebene, die nicht die Nullstellen der Kubik $f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$ enthält. Für $u \in R_1$ definieren wir eine Funktion $z = g(u)$ durch

$$z = g(u) = \int_u^\infty \frac{dt}{\sqrt{f(t)}},$$

wobei ein fester Zweig der Quadratwurzel gewählt wird, wenn sich t in R_1 ändert. Beachten Sie, dass das Integral konvergiert und, da R_1 einfach zusammenhängend ist, ist es unabhängig vom Weg in R_1 von u nach ∞. Die Funktion

$z = g(u)$ kann analytisch fortgesetzt werden, in dem wir eine einfach zusammenhängende Teilmenge R_2 von $\mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ wählen, die einen nichtleeren Schnitt mit R_1 hat. Wenn $u \in R_2$, dann wählen wir $u_1 \in R_1 \cap R_2$ und setzen

$$z = g(u) = g(u_1) + \int_u^{u_1} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $u_1 \in R_1 \cap R_2$ und des Weges von u nach u_1. Indem wir so fortfahren, bekommen wir eine mehrwertige analytische Funktion, da die Folge der Mengen $R_1, R_2, \ldots$ sich um die Punkte e_1, e_2, e_3 winden kann.

(a) (1 Punkt) Drücken Sie $(dz/du)^2$ und $(du/dz)^2$ durch u aus.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $u = \wp(z)$. Hinweis: Wenn wir uns um die e_1, e_2, e_3 winden, kann sich der Wert von z nur in einem Element von L ändern. Also ist $z = g(u)$ in $\mathbb{C}/L$ wohldefiniert. Deswegen erstreckt sich die Funktion $z = g(u)$ aus Stetigkeit nach e_1, e_2, e_3.

(c) (1 Punkt) Sei C_1 der Weg in der komplexen u-Ebene von e_2 nach ∞, der von $u = \wp(z)$ durchlaufen wird, wenn z von $\omega_2/2$ nach 0 entlang der Kante der Grundmasche geht. Zeigen Sie dass, für einen passenden Zweig der Quadratwurzel gilt

$$\int_{C_1} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = -\frac{\omega_2}{2}.$$

(d) (1 Punkt) Sei C_2 der Weg, der von ∞ nach e_2 entlang C_1 geht, dann sich einmal um e_2 windet und entlang C_1 nach ∞ zurück geht. Nehmen Sie den gleichen Zweig wie in (c) und zeigen Sie, dass

$$\int_{C_2} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = \omega_2.$$

8. (a) (1 Punkt) Beschreiben Sie, wie die Funktion $z = g(u)$ alle Urbilder von u unter $u = \wp(z)$ geben kann.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass alle Wurzeln von e_1, e_2, e_3 genau dann reell sind, wenn g_2, g_3 reell sind und $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$.

(c) (1 Punkt) Nehmen Sie an, dass die Bedingungen in (a) erfüllt sind. Ordnen Sie die e_i, so dass $e_2 > e_3 > e_1$. Zeigen Sie, dass Sie die Perioden von L als

$$\frac{\omega_1}{2} = i \int_{-\infty}^{e_1} \frac{dt}{\sqrt{-f(t)}}, \quad \frac{\omega_2}{2} = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}$$

dargestellt werden können. Hinweis: Wählen Sie den positiven Zweig und integrieren Sie entlang der reellen Achse.

(d) (1 Punkt) Beschreiben Sie unter diese Annahme, wie man den Weg der Integration und den Zweig ändern kann, um die anderen Werte von z mit $u = \wp(z)$ zu finden, nämlich $\pm z + m\omega_1 + n\omega_2$ für $m, n \in \mathbb{Z}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 30.04.2008 um 10:00 Uhr.