Dr. Emanuel Scheidegger
MMath Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Modulformen
SS 07/08

Übungsblatt 3

9. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Länge eines Bogens einer Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (0 < b \leq a)$$

auf ein Integral vom Typ

$$\int \frac{1 - k^2 x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} dx$$

führt.

Wähle eine geeignete Parametrisierung des Bogens $\gamma : [p, q] \to \mathbb{R}^2$. Die Bogenlänge ist dann gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_p^q \|\dot{\gamma}\| dt.$$

Welche Bedeutung hat dabei k? Der gesamte Umfang der Ellipse ist

$$\begin{aligned} U &= 4a \int_0^1 \frac{1 - k^2 x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} dx \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Dies ist ein sogenanntes elliptisches Integral zweiter Gattung. Von elliptischen Integralen spricht man allgemein, wenn der Integrand das Produkt einer rationalen Funktion mit einer Quadratwurzel eines Polynoms dritten oder vierten Grades ohne mehrfache Nullstelle ist. Der Begriff "elliptische Funktion" hat seine historische Wurzel darin, dass die Berechnung von Ellipsenbögen auf solche Integrale führt.

10. Beweis von Prop. 5.8 aus der Vorlesung. Sei $f(z) = e^{i\pi\left(\frac{\tau}{4} + z + \frac{1}{2}\right)} \vartheta\left(\tau, z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)$. Dann gilt:

$$\wp(z) = -\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)' + \frac{1}{3} \frac{f'''(0)}{f'(0)}.$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)' \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}^{+}$.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Pole von $\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)'$, sowie die Laurentreihe von $\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)'$ um einen Pol, um die Behauptung zu zeigen.

11. (a) (2 Punkte) Wieviele Wendepunkte gibt es auf einer elliptischen Kurve ausser dem Punkt im Unendlichen? Geben Sie die Gleichung für die x-Koordinaten dieser Wendepunkte an, und lösen Sie die Gleichung für die Kurve $y^2 = 4x^3 - 8x$.

    (b) (2 Punkte) Der Punkt $(2, 4)$ liegt auf der Kurve $y^2 = 4x^3 - 8x$. Zeigen Sie, dass sein Doppeltes bezüglich der Addition auf elliptischen Kurven der Punkt $\left(\frac{9}{4}, -\frac{21}{4}\right)$ ist.

12. Ein Punkt $p = (x, y) = (\wp(z), \wp'(z)) \in X$ hat endliche Ordnung genau dann, wenn $Nz \in L$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Das kleinste solche N heisst *Ordnung von p*.

    (a) (2 Punkte) Beschreiben Sie geometrisch die vier Punkte der Ordnung 2, sowie die 12 Punkte der Ordnung 4, die nicht von Ordnung 2 sind.

    (b) (2 Punkte) Beschreiben Sie geometrisch die 9 Punkte der Ordnung 3.

Abgabetermin: Dienstag, 06.05.2008 um 10:00 Uhr.