

## Übungsblatt 5

17. (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass  $\pm S, T^2$  eine der Untergruppen der Stufe 2 aus Aufgabe 16 erzeugen. Diese Untergruppe wurde von Hecke  $\Gamma_\theta$  genannt.
- (b) (1 Punkt) Sei  $\bar{\Gamma}^0(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \mid b \equiv 0 \pmod{2} \right\} / \{\pm 1\}$ . Zeigen Sie, dass  $\bar{\Gamma}^0(2)$  von  $TST$  und  $T^2$  erzeugt wird, und dass  $\bar{\Gamma}_0(2)$  von  $T$  und  $ST^2S$  erzeugt wird.
- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass  $\bar{\Gamma}(2)$  von den Elementen  $T^2$  und  $ST^{-2}S$  erzeugt wird.
- (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass  $\bar{\Gamma}_0(4)$  von den Elementen  $T$  und  $ST^{-4}S$  erzeugt wird.
18. (a) (2 Punkte) Sei  $p$  eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die folgende Liste von Elementen aus  $\Gamma_1$  ein vollständiges Repräsentantensystem  $\{\alpha_i\}$  für  $\Gamma_0(p^n)$  in  $\Gamma_1$  ist, d.h. dass  $\Gamma_1 = \bigcup \alpha_j \Gamma + 0(p^n)$  eine disjunkte Vereinigung ist:

$$\begin{aligned} & 1 \\ & T^{-k}S, \quad k = 0, \dots, p^n - 1 \\ & ST^{-kp}S, \quad k = 1, 2, \dots, p^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

- (b) (1 Punkt) Benutzen Sie Aufgabe (a) um den Fundamentalbereich von  $\Gamma_0(4)$  zu zeichnen.
- (c) (1 Punkt) Benutzen Sie Aufgabe (a) um den Fundamentalbereich von  $\Gamma_0(p)$  zu beschreiben. Zeichnen Sie den Fundamentalbereich von  $\Gamma_0(3)$ .
19. (a) (2 Punkte) Beachten Sie, dass  $\Gamma(2)$  hat 3 Randpunkte in den Punkten  $\infty, 0, -1$ . Zeigen Sie, dass  $\Gamma(2)$  3 Spitzen hat, d.h. dass die 3 Punkte  $\Gamma(2)$ -inäquivalent zueinander sind.
- (b) (2 Punkte) Wie viele Spitzen hat jede der Kongruenzgruppen aus Aufgabe 16?
20. (a) (2 Punkte) Sei  $p$  eine Primzahl. Zeigen Sie, dass  $\Gamma_0(p)$  2 Spitzen in den Punkten  $\infty$  und  $0$  hat.

- (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass  $\Gamma_0(p^2)$   $p + 1$  Spitzen hat:  $\infty, 0$  und  $-\frac{1}{kp}$  für  $1, \dots, p - 1$ .

Abgabetermin: Dienstag, 20.05.2008 um 10:00 Uhr.