Dr. Emanuel Scheidegger
Mmath Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Modulformen
SS 07/08

# Übungsblatt 6

21. (a) (1 Punkt) Benützen Sie die Relationen zwischen geeigneten Eisensteinreihen, um $\sigma_7$ durch $\sigma_3$, $\sigma_9$ durch $\sigma_3$ und $\sigma_5$, und $\sigma_{13}$ durch $\sigma_5$ und $\sigma_7$ auszudrücken.

    (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die lineare Relation zwischen $E_{12}, E_6^2$ und $\Delta$.

    (c) (1 Punkt) Schreiben Sie $\Delta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$. Drücken Sie $\tau(n)$ durch $\sigma_{11}$ und $\sigma_5$ aus.

    (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \mod 691$.

22. (a) (1 Punkt) Beweisen Sie die Identität $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) x^n$.

    (b) (1 Punkt) Sei $a \equiv 1 \mod 4$ eine ganze Zahl, die grösser als 1 ist. Zeigen Sie, dass $E_{a+1}(i) = 0$.

    (c) (2 Punkte) Beweisen Sie die folgende Folge von Summationsformeln:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{e^{2\pi n} - 1} &= \frac{1}{2(a+1)} B_{a+1} \\ &= \begin{cases} 1/504, & a = 5; \\ 1/264, & a = 9; \\ 1/24, & a = 13; \text{ usw.} \end{cases} \end{aligned}$$

23. (a) (2 Punkte) Bringen Sie die elliptische Kurve $x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0$ in Weierstrassform.

    (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die $j$-Invariante dieser elliptischen Kurve.

24. (4 Punkte) Sei $d_k = \dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma_1)$ die Dimension des Vektorraumes der holomorphen Modulformen vom Gewicht $k$. Zu jedem $d_k$-Tupel komplexer Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{d_k - 1}$ existiert genau eine Modulform vom Gewicht $k$, deren ertse $d_k$ Fourierkoeffizienten gerade die vorgegebenen Zahlen sind.

    *Hinweis*: Wenn die ersten $d_k$ Fourierkoeffizienten einer Modulformen verschwinden, so ist sie durch $\Delta^{d_k}$ teilbar, d.h. der Quotient ist weider eine holomorphe Modulform.

Abgabetermin: Dienstag, 27.05.2008 um 10:00 Uhr.