Dr. Emanuel Scheidegger
MMath Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Modulformen
SS 07/08

Übungsblatt 7

25. (a) (2 Punkte) Benützen Sie die Relationen zwischen geeigneten Eisensteinreihen, um σ_5 durch σ_1 und σ_3, und σ_7 durch σ_1 und σ_5 auszudrücken.

    (b) (2 Punkte) Benützen Sie die Rankin-Cohen-Klammer von geeigneten Eisensteinreihen, um zu zeigen, dass $\tau(n) \equiv n\sigma_3(n) \mod 7$ und $\tau(n) \equiv n\sigma_9(n) \mod 5^2$.

26. (a) (2 Punkte) Sei $f \in M_k(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass

$$D^n f \quad = \quad \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{(k+r)_{n-r}}{(4\pi y)^{n-r}} \partial^r f$$

    (b) (2 Punkte) Sei $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq p)}(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass

$$(c\tau + d)^{-k-2r}(D^r f)(\gamma \cdot \tau) =$$
$$\sum_{i=0}^{p+r} \left(\sum_{j=0}^{r} \frac{j!}{(2\pi i)^j} \binom{r}{j} \binom{k+r-i+j-1}{j} D^{r-j} f_{i-j}(\tau) \right) \left(\frac{c}{c\tau + d} \right)^i$$

    für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $\gamma \in \Gamma_1$.

27. Sei $y(x)$ eine nicht-konstante Funktion von $x \in \mathbb{C}$. Die Schwarzsche Ableitung von y bezüglich x ist

$$\{y; x\} := \frac{2y'y''' - 3(y'')^2}{2(y')^2}$$

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\left\{ \frac{ay+b}{cy+d}; x \right\} = \{y; x\}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$.

    (b) (2 Punkte) Sei $x(z)$ eine nicht-konstante Funktion von z. Zeigen Sie, dass

$$\{y; z\} \quad = \quad \{x; z\} + \{y; x\} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 .$$

28. (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \frac{t^n \, dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{\pi}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \ldots \cdot \left(n - \frac{1}{2} \right)$$

    für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) (1 Punkt) Nehmen Sie an, dass e_1, e_2, e_3 die Wurzeln von $4x^3 - g_2 x - g_3$ sind und dass $e_1 < e_3 < e_2$. Sei $\lambda = (e_3 - e_1)/(e_2 - e_1) \in (0, 1)$. Benützen Sie Aufgabe 8 um die folgende Formel abzuleiten, wobei ω_2 die zweite Periode des Gitters L ist.

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_1}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\lambda t)}}.$$

(c) (1 Punkt) Leiten Sie die Formel $\omega_2 = \pi(e_2 - e_1)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda)$ ab, wobei

$$ {}_2F_1(a, b; c; \lambda) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \lambda^n $$

die sogenannte *hypergeometrische Reihe* ist. Hier ist $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ das Pochhammer-Symbol für $a \in \mathbb{C}$.

(d) Zeigen Sie, dass die hypergeometrische Reihe in Aufgabe (c) die Differentialgleichung $\lambda(1-\lambda)F''(\lambda) + (c - (1 + a + b)\lambda)F'(\lambda) - abF(\lambda) = 0$ erfüllt.

Abgabetermin: Dienstag, 03.06.2008 um 10:00 Uhr.