Dr. Emanuel Scheidegger
MMath Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Modulformen
SS 07/08

Übungsblatt 8

29. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $(M_*(\Gamma_1), [\ ,\ ]_0, [\ ,\ ]_1)$ eine Poisson-Algebra ist.

30. (a) (2 Punkte) Sei $n \geq 0$, $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq s)}$, $g \in \widetilde{M}_l^{(\leq t)}$. Zeigen Sie, dass es ein $h \in \widetilde{M}_{k+l+2n}^{(\leq s+t)}$ gibt, so dass $[f, \Delta g]_n = \Delta h$.

    (b) (2 Punkte) Benützen Sie Aufgabe (a) dreimal hintereinander mit geeigneten f, g, h, oder eine andere Methode, um zu zeigen, dass E_2 die Chazy-Gleichung $D^3 u - uD^2 u + \frac{3}{2}(Du)^2 = 0$ erfüllt.

31. (a) (2 Punkte) Benützen Sie Aufgaben 8 und 28 um die folgende Formel herzuleiten:

$$\omega_1 = \pi(e_2 - e_1)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-\lambda) = \frac{d\omega_2}{d\lambda}.$$

    (b) (2 Punkte) Definieren Sie $\tau(\lambda) = \frac{\omega_1(\lambda)}{\omega_2(\lambda)}$. Sei $\lambda(\tau)$ die Umkehrfunktion von $\tau(\lambda)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\{\lambda; \tau\} + \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{2\lambda^2(1-\lambda)^2}\lambda'^2 = 0.$$

32. Sei E eine Familie von elliptischen Kurven gegeben durch $y^2 = 4x^3 - g_2(a)x - g_3(a)$ parametrisiert durch $a \in \mathbb{C}$. Sei $\gamma \subset E$ eine nicht-triviale geschlossene Kurve auf E, die nicht von a abhängt. Definieren Sie die Periodenintegrale $\varpi_1(a) = \int_\gamma \frac{dx}{y}$ und $\varpi_2(a) = \int_\gamma \frac{xdx}{y}$.

    (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{d^2\varpi_i}{da^2} + P(a)\frac{d\varpi_i}{da} + Q(a)\varpi_i = 0 \qquad i = 1, 2,$$

wobei $P(a)$ und $Q(a)$ zu bestimmende Funktionen in $g_2(a), g_3(a)$ und ihre Ableitungen sind. Drücken Sie dazu die Ableitungen nach a durch Ableitungen nach $g_\alpha(a)$, $\alpha = 2, 3$, aus. Zeigen Sie damit in zwei Schritten, dass

$$\frac{\partial\varpi_i}{\partial g_\alpha} = \sum_j C_{\alpha,j}(a)\varpi_j$$

gilt. Im ersten Schritt reduzieren Sie Ausdrücke der Form $\frac{p(x)}{y^3}$ zu $\frac{q(x)}{y}$, wobei $p(x), q(x)$ Polynome sind, in dem Sie die Diskriminante $\delta = g_2^3 - 27g_3^2$ schreiben als $\delta = Ay^2 + B(y^2)'$. Lassen Sie dabei totale Ableitungen weg, weil Sie unter dem Integral nichts beitragen.

Im zweiten Schritt reduzieren Sie Ausdrücke der Form $\frac{x^n}{y}$ zu den Integranden von ϖ_i, $i = 1, 2$, indem Sie sukzessive x^2 durch y' und $g_2(a)$ ausdrücken, partiell integrieren und danach y durch $\frac{y^2}{y} = \frac{4x^3 - g_2(a)x - g_3(a)}{y}$ ausdrücken. Lassen Sie dabei wieder totale Ableitungen weg.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie $P(a), Q(a)$ für die Kubik aus Aufgabe 23. Vergleichen Sie die Differentialgleichung mit der hypergeometrischen Differentialgleichung aus Aufgabe 28(d) und bestimmen Sie die Werte von a, b, c.

Abgabetermin: Dienstag, 10.06.2008 um 10:00 Uhr.