Dr. Emanuel Scheidegger
Mmath Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Modulformen
SS 07/08

Übungsblatt 9

33. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $E_4(\tau) = {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; t(\tau)\right)^4$, wobei $t(\tau) = \frac{1728}{j(\tau)}$.

34. Ein Dirichlet-Charakter modulo k ist eine Funktion $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, so dass

    (i) Es gibt eine positive ganze Zahl k, so dass $\chi(n+k) = \chi(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

    (ii) Wenn $\mathrm{ggT}(n,k) > 1$, dann ist $\chi(n) = 0$. Wenn $\mathrm{ggT}(n,k) = 1$, dann ist $\chi(n) \neq 0$.

    (iii) $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

    (iii) besagt, dass χ vollständig multiplikativ ist. Für $a \in \mathbb{Z}$ und p eine Primzahl ist das Legendre-Symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ definiert durch

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & a \equiv 0 \mod p \\ +1 & a \not\equiv 0 \mod p \text{ und für eine ganze Zahl } x \text{ gilt } x^2 \equiv a \mod p \\ -1 & a \not\equiv 0 \mod p \text{ und es gibt kein solches } x \end{cases}.$$

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\chi(1) = 1$. Wenn $a \equiv b \mod k$, dann ist $\chi(a) = \chi(b)$. Wenn $\mathrm{ggT}(a,k) = 1$, dann ist $\chi(a)$ eine $\phi(k)$-te Einheitswurzel, wobei $\phi(k)$ die Euler Totient Funktion ist.

    (b) (1 Punkt) Sei $\chi\colon \mathbb{Z}_k^* \to \mathbb{C}^*$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass χ zu einem Dirichlet Charakter modulo k erweitert werden kann.

    (c) (1 Punkt) Wenn $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$, dann ist $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \mod p$ und schliessen Sie daraus, dass $\left(\frac{a}{p}\right)$ ein Dirichlet Charakter modulo p ist.

    (d) (1 Punkt) Seien p und q Primzahlen. Zeigen Sie, dass gilt $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$ indem Sie zeigen, dass

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin(\frac{2\pi}{p}qn)}{\sin(\frac{2\pi}{p}n)}.$$

35. (4 Punkte) Sei $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ und sei $g(\tau) = f(\alpha \cdot \tau)$. Zeigen Sie, dass wenn $\alpha = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\alpha \cdot \tau = n\tau$, dann ist $g(\tau)|_k\gamma = f(n\tau)|_k \begin{pmatrix} a & nb \\ c/n & d \end{pmatrix}$.

36. Sei Γ eine Kongruenzgruppe von Γ_1 der Stufe N und bezeichnen Sie mit Γ_κ den Stabilisator von $\kappa \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ in Γ. Sei $\kappa = \alpha^{-1} \cdot \infty$, $\alpha \in \Gamma_1$.

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\alpha \Gamma_\kappa \alpha^{-1} = (\alpha \Gamma \alpha^{-1})_\infty$.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige ganze Zahl h gibt, genannt Verzweigungsindex von Γ bei κ, so dass

      i. im Fall $-I \in \Gamma$, $\Gamma_\kappa = \pm \alpha^{-1} \{T^{hn}\}_{n \in \mathbb{Z}}\, \alpha$;

      ii. im Fall $-I \notin \Gamma$, entweder $\Gamma_\kappa = \alpha^{-1} \{T^{hn}\}_{n \in \mathbb{Z}}\, \alpha$, oder $\Gamma_\kappa = \alpha^{-1} \{(-T^h)^n\}_{n \in \mathbb{Z}}\, \alpha$.

      Zeigen Sie, dass h ein Teiler von N ist. Im Fall (i) ist der Verzweigungspunkt κ vom Typ I, im Fall (ii) vom Typ IIa bzw. IIb.

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass h und der Typ (I,IIa oder IIb) von κ unabhängig von der Wahl von $\alpha \in \Gamma$ ist und dass sie nur von der Γ-Äquivalenzklasse abhängen.

   (d) (1 Punkt) Finden Sie die Verzweigungsindizes von Γ an allen Spitzen für $\Gamma = \Gamma_0(p)$, $\Gamma_0(p^2)$ und $\Gamma(2)$, wobei p eine Primzahl ist.

Abgabetermin: Dienstag, 17.06.2008 um 10:00 Uhr.