Übungsblatt 01

Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 26. April – 30. April 2010
Abgabe: keine Abgabe

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ einen Körper bzgl. der Addition,

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

und der Multiplikation,

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$

bildet.

Aufgabe 2 Die komplexe Konjugation, $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$, ist ein Automorphismus auf dem komplexen Zahlenkörpers $\mathbb{C}$, d.h. eine Bijektion, die die Körpereigenschaften erhält. Was ist die geometrische Interpretation der komplexen Konjugation in der Gaußschen Zahlenebene?

Aufgabe 3 Zeigen Sie die folgenden Relationen:

1. $|z|^2 = z\bar{z}$.
2. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(iz)$.
3. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
4. $\arg(z) = -\arg(\bar{z}) \mod 2\pi$.

Aufgabe 4 Jede komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann auch als reelle Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ verstanden werden, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ für $z = x + iy$. Berechnen Sie die reellen Ableitungen

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y},$$

für folgende komplexe Funktionen ($n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$):

1. $f(z) = z^n$.
2. $f(z) = (\bar{z})^n$.
3. $f(z) = |z|^2$.

Was fällt Ihnen auf?