Übungsblatt 10

Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 5. Juli – 9. Juli 2010
Abgabe: spätestens Freitag, 2. Juli 2010, 10:00 Uhr
in die Box "Funktionentheorie" im Gebäude L1

Aufgabe 1 Bestimmen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Hinweis: Schreiben Sie das Integral in ein Wegintegral

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{i}{4\pi} \int_{\gamma_r} \frac{(\log z)^2}{(z-1)^3} dz$$

um, wobei log der Hauptzweig des Logarithmus mit $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ ist, und γ_r sich aus zwei Wegen zusammensetzt. Der erste starte bei $-\infty + ir$ und gehe parallel zur negativen reellen Achse $\mathbb{R}_-$ bis ir, der zweite starte bei $-ir$ und gehe parallel zu $\mathbb{R}_-$ nach $-\infty - ir$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass eine doppelt periodische meromorphe Funktion, d.h. $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$ mit $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^\times$ und $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$, in ihrem Fundamentalbereich $\{a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in \mathbb{C} \mid 0 \leq a_i < 1\}$ gleich viele Nullstellen wie Polstellen hat (gezählt mit Multiplizität).

Aufgabe 3 $f(z) = p(z)/q(z)$ sei eine rationale Funktion auf $\mathbb{C}$, mit Polynomen $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ und $q(z) = b_m z^m + \ldots + b_0$, sodass $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$. Bestimmen Sie die Summe aller Residuen von f in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4 Gegeben sei ein Polynom $z^n + bz^k + c$, mit $0 < k < n$ und $b, c \neq 0$.

1. In welchem Gebiet liegen nach dem Satz von Rouché die Nullstellen falls gilt (mit $r < R$): (i) $|z^n| > |bz^k + c|$ für $|z| = R$ und (ii) $|c| > |z^n + bz^k|$ für $|z| = r$.
2. Was kann man aus $|bz^k| < |z^n + c|$ bzw. $|bz^k| > |z^n + c|$ für $|z| = \rho$ schließen?
3. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen
   - von $z^8 - 3z^2 + 1$ für $|z| > 1$,
   - von $z^7 - 5z^3 + 7$ für $1 < |z| < 2$.