Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Jan Schlüter SS 2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II
Blatt 10
Abgabetermin: **Do, 21.07.2011, 8:00 Uhr**

Aufgabe 10-1: (4 Punkte)
a) Sei J eine $(n \times n)$-Matrix in Jordannormalform über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass eine symmetrische invertierbare Matrix X existiert, so dass die Matrix XJ symmetrisch ist.
b) Sei f ein Endomorphismus des endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V, dessen charakteristisches Polynom über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie die Existenz einer symmetrischen, nicht entarteten Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V, so dass f bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ selbstadjungiert ist, d.h. dass

$$\forall v, w \in V: \quad \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$$

gilt.
Erinnerung: Die Definition von nicht entartet finden Sie in Aufgabe 5-4.

Aufgabe 10-2: (4 Punkte)
a) Seien V, W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $w \in W$ und $f : V \to W$ ein surjektiver Homomorphismus. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(w)$ ein affiner Raum ist.
b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir bezeichnen mit $y^{(1)} = y'$ die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $y : I \to \mathbb{R}$. Induktiv definieren wir die i-fache Ableitung $y^{(i)} := (y^{i-1})'$. Sei $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y^{(1)} + a_0 y$ mit $a_i : I \to \mathbb{R}$ stetig für $i = 0, ..., n-1$. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $y_0 : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Abbildung, so dass $L(y_0) = f$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $\{y : I \to \mathbb{R} \mid L(y) = f\}$ der linearen Differentialgleichung $L(y) = f$ ein affiner Raum ist.

Aufgabe 10-3: (4 Punkte)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{KP}^n := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) := \{U \mid U \subset \mathbb{K}^{n+1} \quad \text{1-dimensionaler Untervektorraum}\}.$$

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{KP}^n$ heißt ein *i-dimensionaler projektiver Unterraum*, falls ein $(i+1)$-dimensionaler Unterraum $V \subset \mathbb{K}^{n+1}$ existiert, so dass

$$X = \{x \in \mathbb{KP}^n \mid x \subset V\}.$$

Ein $(n-1)$-dimensionaler projektiver Unterraum heißt eine *Hyperebene*. Wir definieren für $0 \leq i \leq n$ den n-dimensionalen Untervektorraum $\mathbb{K}_i^n \subset \mathbb{K}^{n+1}$ durch

$$\mathbb{K}_i^n := \{v = {}^T(k_0, k_1, ..., k_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid k_i = 0\}$$

und die Hyperebene

$$H_i = \{x \in \mathbb{KP}^n \mid x \subset \mathbb{K}_i^n\}.$$

Schließlich definieren wir

$$\mathbb{A}_i^n(\mathbb{K}) = \mathbb{KP}^n \setminus H_i.$$

Zeigen Sie:

a) $\bigcup_{i=0}^n \mathbb{A}_i^n(\mathbb{K}) = \mathbb{KP}^n$

b) Für eine beliebige Hyperebene H ist $\mathbb{KP}^n \setminus H$ isomorph zum standard-affinen Raum $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{A}(\mathbb{K}^n)$.

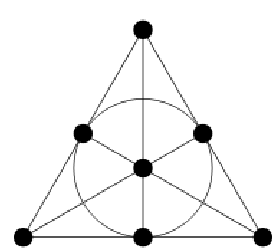
Aufgabe 10-4: (4 Punkte)
Wir bezeichnen mit $\mathbb{F}_2$ den Körper mit 2 Elementen.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der n-dimensionale Untervektorräume von $(\mathbb{F}_2)^3$ für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der n-dimensionalen affinen Unterräume von $\mathbb{A}^3(\mathbb{F}_2)$ für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

c) Wie viele Punkte und wie viele Geraden (d.h. Hyperebenen) gibt es in $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$?

d) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$ und dem Bild



her.