

Übungsblatt 4
Funktionentheorie, Sommersemester 2012
Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst
Abgabe: zuletzt Donnerstag, 24.5.2012, 12 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichne $\partial B_r(a)$ den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + r \cdot \exp(2\pi it)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Wegintegrale. (Fallunterscheidung !)

1.
$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{\cos(z)}{z-1} dz \quad \text{für } r \neq 1$$
2.
$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz \quad \text{für } r \neq 1$$
3.
$$\int_{\partial B_r(i\pi/2)} \frac{\exp(z)}{z^2 + \pi^2/4} dz \quad \text{für } r \neq \pi$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Für $m, n \in \mathbb{N}$ und $|a| < r < |b|$ berechne man die folgenden Wegintegrale (es gelten die Bezeichnungen aus Aufgabe 1)

1.
$$\int_{\partial B_1(1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$$
2.
$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m} dz$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Geben Sie für alle Integranden aus Aufgabe 1 ein Gebiet an, in denen sie eine Stammfunktion besitzen.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder geschlossene Weg auf einem sternförmigen Gebiet homotop zum konstanten Weg ist.