# Übungsblatt 11

## Funktionentheorie, Sommersemester 2012

Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: zuletzt Donnerstag, 19.7.2012, 12 Uhr

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x} dx, \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

Hinweis: Betrachten Sie für das erste Integral folgenden Integrationsweg: Auf dem Abschnitt $-R$ bis $R$ auf der reellen Achse entfernen wir das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ und ersetzen es durch einen Halbbogen von Radius $\varepsilon$ in der oberen Halbebene um den Nullpunkt. $-R$ und $R$ verbinden wir durch einen Halbbogen in der oberen Halbebene um den Nullpunkt.

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie den *Satz von Rouché*:

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir betrachten zwei holomorphe Funktionen $f, g : U \to \mathbb{C}$ mit jeweils endlich vielen Nullstellen. Sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein nullhomologer Weg, der zudem einfach geschlossen ist.[1] Falls $\forall \xi \in \gamma([a,b])$ gilt, dass $|f(\xi) - g(\xi)| < |g(\xi)|$, dann folgt: $f$ und $g$ haben im Innern von $\gamma$ gleich viele Nullstellen (gezählt mit Multiplizität).

Hinweis: Betrachte $h_t(z) := g(z) + t(f(z) - g(z))$ für $t \in [0,1]$.

## Aufgabe 3 (3 Punkte)

Eine Anwendung des Satzes von Rouché: Wieviele der Nullstellen des Polynoms $f(z) = 2z^4 - 5z + 2$ liegen innerhalb des Einheitskreises, wieviele außerhalb?

[1] $\forall z \in U \setminus \gamma([a,b])$ ist $Uml(\gamma, z) \in \{0,1\}$ oder $\forall z \in U \setminus \gamma([a,b])$ ist $Uml(\gamma, z) \in \{0,-1\}$.

## Aufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion

$$f(z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}.$$

1. Bestimmen Sie die Polstellen und die zugehörigen Hauptteile der Laurentreihen von $f$.

2. Geben Sie für die im ersten Aufgabenteil erhaltenen Hauptteile die Lösung $g(z)$ des Mittag-Leffler-Problems an, in der die zu subtrahierenden Partialsummen konstant sind. Prüfen Sie die gleichmässige Konvergenz.

3. Beweisen Sie die Formel

   $$\frac{1}{sin(z)} = cot(z/2) - cot(z).$$

   Zeigen Sie, dass f=g.

   Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung bewiesene Formel

   $$\pi cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n>0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right).$$