Übungsblatt 1

Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 26. April 2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

1. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n, n \in \mathbb{Z}; \qquad \sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n; \qquad \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}+\frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}.$$

2. Bestimmen Sie Betrag und Argument von

$$\frac{1+i}{2-3i}; \qquad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{201}; \qquad (1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}, n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie für $z,w \in \mathbb{C}$ die Dreiecksungleichung

$$|z+w| \leq |z|+|w|.$$

Wann gilt Gleichheit? Zeigen Sie weiter

$$||z|-|w|| \leq |z-w|.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

1. Die *obere Halbebene* $\mathbb{H}$ besteht aus allen komplexen Zahlen mit positiven Imaginärteil:

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $z \in \mathbb{H}$ genau dann, wenn $-1/z \in \mathbb{H}$.

2. Seien $z,a \in \mathbb{C}$. Überzeugen Sie sich, dass gilt:

$$|1-z\bar{a}|^2-|z-a|^2=(1-|z|^2)(1-|a|^2)$$

und folgern Sie daraus für $|a|<1$:

$$|z|<1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-a}{z\bar{a}-1}\right|<1 \quad \text{und} \quad |z|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-a}{z\bar{a}-1}\right|=1.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie mit Begründung eine geometrische Konstruktion für die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{\overline{z}}. \end{aligned}$$

Warum wird diese Abbildung "Spiegelung an der Einheitskreislinie" genannt? Bestimmen Sie das Bild unter f von

1. $\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$,
2. $\{z \in \mathbb{C} | |z| > 1\}$,
3. $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.

Geben Sie weiter eine geometrische Konstruktion für die Abbildung

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Warum heißt diese Abbildung "Inversion an der Einheitskreislinie"? Welche Fixpunkte besitzt g, das heißt für welche $z \in \mathbb{C}^*$ gilt $g(z) = z$?