Übungsblatt 10

Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 5. Juli 2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Formeln:

a)

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k},\ k \in \mathbb{N}$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1 auf Blatt 6.

b)

$$\frac{\pi^2}{sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}$$

c)

$$\pi\ tan(\frac{1}{2}\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4z}{(2n+1)^2 - z^2}$$

Hinweis: $\tan(z) = \cot(z) - 2cot(2z)$.

d)

$$\frac{\pi}{sin(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z+n}$$

Hinweis: $\frac{1}{\sin(z)} = \cot(z) + \tan(\frac{1}{2}z)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Verwenden Sie Aufgabe 1b sowie die Periodizität des Sinus.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$$

mit Hilfe von a).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f = p/q$ eine rationale Funktion ohne Pole in $[0,\infty)$ mit $deg(q) \geq deg(p)+2$. Beweisen Sie:

$$\int_0^\infty f(x)dx = -\sum_{a\in\mathbb{C}_+} res_a(f(z)Log(-z)).$$

Hierbei ist $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{R} : t\geq 0\}$ die positiv geschlitzte Ebene. Berechnen Sie damit das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+x^2+x+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie auf zweierlei Weise das Integral

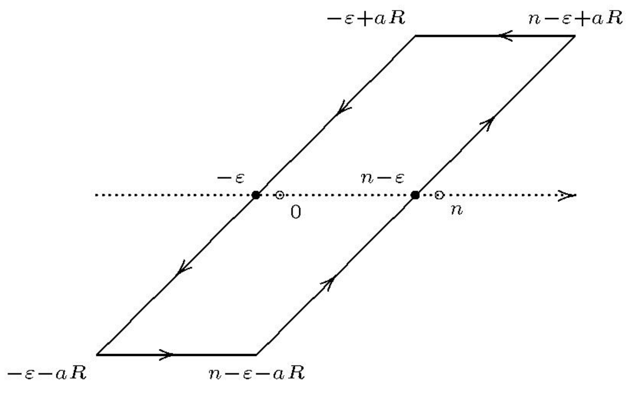
$$\int_\gamma \frac{exp(2\pi iz^2/n)}{exp(2\pi iz)-1}dz$$

entlang der in der Abbildung gegebenen Kurve und leiten Sie daraus für die Gaußsche Summe

$$G_n := \sum_{k=0}^{n-1} exp\left(\frac{2\pi ik^2}{n}\right),\ n\in\mathbb{N},$$

die folgende Formel ab:

$$G_n = \frac{1+(-i)^n}{1-i}\sqrt{n}.$$



$$a^2 := -\frac{n}{2\pi\mathrm{i}}\ , \qquad \mathrm{Re}\, a > 0\ .$$