Übungsblatt 11

Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 12. Juli 2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige, dass die folgenden Produkte für $|z| < 1$ normal konvergieren und beweise die angegebenen Identitäten:

1. $$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right) = \frac{1}{1-z},$$

2. $$\prod_{n=1}^{\infty}\left((1+z^n)\,(1-z^{2^{n-1}})\right) = 1.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

1. Zeige, dass es eine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, so dass
$$\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})} = exp(g(z)).$$

2. Zeige, dass g ein Polynom vom Grad ≤ 1 ist und folgere die Verdopplungsformel der Gamma-Funktion.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ und $Re(w) > 0$ sei
$$B(z,w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt.$$

Die so definierte Funktion heißt Eulersche *Betafunktion*.

Zeige:

1. B ist stetig (als Funktion beider Variablen).

2. Für festes w ist die Abbildung $z \mapsto B(z,w)$ holomorph in der Halbebene $Re(z) > 0$ und für festes z ist die Abbildung $w \mapsto B(z,w)$ holomorph in der Halbebene $Re(w) > 0$.

3. Es gilt
$$B(z+1,w) = \frac{z}{z+w}B(z,w),\ B(1,w) = \frac{1}{w}.$$

4. Die Funktion
$$f(z) := \frac{B(z,w)\Gamma(z+w)}{\Gamma(w)}$$
hat die charakterisierenden Eigenschaften von Γ und es gilt die Eulersche Identität
$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeige:

1.
$$B(z,w) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}dt,$$

2.
$$B(z,w) = 2\int_0^{\pi/2} (sin\ \varphi)^{2z-1}(cos\ \varphi)^{2w-1}d\varphi.$$