Übungsblatt 2

Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 3. Mai 2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ bezeichne im Folgenden $x = Re(z)$ den Real- und $y = Im(z)$ den Imaginärteil. Welche der folgenden Funktionen sind komplex differenzierbar?

1. $f(x+iy) = xy + \frac{i}{2}(y^2 - x^2 + 20)$,
2. $f(z) = |z|^2$,
3. $f(z) = zRe(z)$,
4. $f(x+iy) = exp(y) - iexp(x)$.

Geben Sie die Punktmengen an, in denen die Funktionen komplex differenzierbar sind.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Bestimmen Sie alle auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbaren Funktionen f, deren Realteil u gegeben ist durch

$$u = e^{-y} cos(x).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die *Cayley-Abbildung*

$$f(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

eine im Großen konforme Abbildung von der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} || z| < 1\}$ ist. Wohin wird der Rand von $\mathbb{H}$ abgebildet? Geben Sie die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie für $z = x + iy \neq 0$, dass gilt:

$$Arg(z) = \begin{cases} \pi & \text{falls } y = 0 \text{ und } x < 0, \\ \operatorname{sgn(y)} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Hierbei ist Arg der Hauptwert des Arguments, also $-\pi < Arg(z) \leq \pi$, und arccos ist der reelle Arcuscosinus.

2. Sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} | t \leq 0\}$ die linksgeschlitzte Ebene. Zeigen Sie, dass $Arg : \mathbb{C}_- \to \mathbb{R}$ stetig ist. Folgern Sie, dass der Hauptzweig des Logarithmus Log in $\mathbb{C}_-$ stetig ist.

3. Sei $a < 0$ eine negative reelle Zahl. Berechnen Sie die beiden Grenzwerte

$$\lim_{z \to a, \Im(z) < 0} Log(z), \qquad \lim_{z \to a, \Im(z) > 0} Log(z).$$

   Was fällt Ihnen auf?