Übungsblatt 3

Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 10. Mai 2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

1. Sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ die Kurve $\gamma(t) = e^{it}$ und $g : im(\gamma) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion vom Bild $im(\gamma)$ von γ nach $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\overline{\int_\gamma g(z)dz} = -\int_\gamma \overline{g(z)} z^{-2} dz.$$

2. Für eine positive reelle Zahl $R > 0$ betrachten wir die Kurve

$$\gamma(t) = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

Schätzen Sie ab:

$$\left| \int_\gamma exp(iz^2)dz \right| \leq \frac{\pi(1-exp(-R^2))}{4R} < \frac{\pi}{4R}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

1. $\int_\gamma |z| dz$, γ verläuft geradlinig von $-i$ nach i,
2. $\int_\gamma |z| dz$, γ verläuft auf dem Rand der Einheitskreisscheibe von $-i$ nach i,
3. $\int_\gamma \overline{z}^3 dz$, $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq \pi$,
4. $\int_\gamma \frac{z}{(z^2+4)^2} dz$, für jeden Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$ von z_1 nach z_2,
5. $\int_\gamma \frac{sin(z)}{z} dz$, $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Welche der folgenden komplexen Funktionen besitzen eine Stammfunktion im angegebenen Bereich? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \overline{z}$,

2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = Re(z)$,
3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|^2$,
4. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = zexp(z^2)$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind Gebiete?

1. $\mathbb{R}$,
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| < 3\}$,
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 3| < 1\}$.