Übungsblatt 4

Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 17. Mai 2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $l : D \to \mathbb{C}$ mit $exp(l(z)) = z$ für alle $z \in D$ heißt ein *stetiger Zweig des Logarithmus*. Zeigen Sie:

1. Jeder weitere stetige Zweig $\tilde{l}$ hat die Gestalt $\tilde{l} = l + 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$.

2. Jeder stetige Zweig l des Logarithmus ist holomorph und es gilt $l'(z) = 1/z$.

3. Auf D existiert genau dann ein stetiger Zweig des Logarithmus, wenn die Funktion $1/z$ eine Stammfunktion auf D besitzt.

4. Geben Sie zwei Gebiete D_1 und D_2 und stetige Zweige $l_1 : D_1 \to \mathbb{C}$ und $l_2 : D_2 \to \mathbb{C}$ an, so dass ihre Differenz auf $D_1 \cap D_2$ nicht konstant ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die *Fresnel'schen Integrale*

$$\int_0^\infty cos(t^2)dt = \int_0^\infty sin(t^2)dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Hinweis: Vergleichen Sie das Integral auf der reellen Achse mit einem geeigneten zweiten Weg. Verwenden Sie dazu Aufgabe 1 von Blatt 3 und die Formel

$$\int_0^\infty exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}/2.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichne $\partial B_r(a)$ den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = a + rexp(2\pi it)$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit der Cauchy-Integralformel:

1. $$\int_{\partial B_2(0)} \frac{sin(z)}{z+i} dz,$$

2.

$$\int_{\partial B_3(-2i)} \frac{dz}{z^2+\pi^2},$$

3.

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{dz}{z^4-1},$$

4.

$$\int_{\partial B_1(3/2)} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei f eine ganze Funktion. Beweisen Sie:

1. Gibt es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$Re\ f(z) \leq M,$$

dann ist f konstant.

2. Seien ω und ω' komplexe Zahlen, die über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind. Gilt

$$f(z+\omega) = f(z) = f(z+\omega')$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f konstant.