Übungsblatt 5

Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 31. Mai 2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

1. Es seien (a_n) und (f_n) Folgen komplexer Funktionen. Zeigen Sie, dass mit $A_n := a_1 + \ldots + a_n$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k = A_1(f_1 - f_2) + \ldots + A_{n-1}(f_{n-1} - f_n) + A_n f_n.$$

2. Zeigen Sie: Seien f_n reelle und a_n komplexe Funktionen auf D, so dass gilt:

   (a) Für jedes $z \in D$ ist die Folge $(f_n(z))$ monoton fallend,

   (b) (f_n) konvergiert gleichmäßig auf D gegen 0,

   (c) es gibt ein $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$ mit $|\sum_{k=1}^{n} a_k(z)| \leq M$ für alle n und alle $z \in D$.

   Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ gleichmäßig auf D.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Ist (a_n) eine reelle, monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| \leq 1$.

   Hinweis: Betrachten Sie die Reihe $(1-z)\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

2. Die logarithmische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$$

   konvergiert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ mit $|z| \leq 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

1. Binomische Reihe $b_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} z^n, \alpha \in \mathbb{C}$,
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} kn \\ n \end{pmatrix} z^n, k \in \mathbb{N}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^3+n}{5n^3-23n^2} \right)^n z^n$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n(2n)!} z^n$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $a,b,c \in \mathbb{C}$ und $-c \notin \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die *hypergeometrische Reihe*

$$F(a,b,c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{c(c+1)\cdots(c+k-1)} \frac{z^k}{k!}$$

für $|z| < 1$ konvergiert und der Differentialgleichung

$$z(z-1)F''(z) + (c-(a+b+1)z)F'(z) - abF(z) = 0.$$

genügt.