Übungsblatt 6

Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 7. Juni 2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Wir betrachten die Bernoulli-Zahlen $B_k, k \in \mathbb{N}, B_0 = 1$ aus der Vorlesung. Zeigen Sie, dass $B_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Entwicklungen um die Null:

1. $$z\cot(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n},$$

2. $$\tan(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}.$$

Hinweis: Benutzen Sie für die zweite Entwicklung die erste.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge einer von der Nullfunktion verschiedenen holomorphen Funktion auf einem Gebiet endlich oder abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\overline{B}_r(0)$ die abgeschlossene Kreisscheibe um die Null mit Radius $r > 0$. Wir betrachten zwei nirgends verschwindende stetige Funktionen $f, g : \overline{B}_r(0) \to \mathbb{C}$, die auf der offenen Kreisscheibe $B_r(0)$ holomorph sind und deren Beträge auf dem Rand übereinstimmen:

$$|f(z)| = |g(z)|, \text{für alle}\, z \in \partial B_r(0).$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gibt, so dass gilt: $f = \lambda g$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei f eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge, die die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B}_r(a)$ enthält. Es gelte $|f(a)| < |f(z)|$ für alle z auf den Rand der Kreisscheibe. Dann hat f eine Nullstelle im Innern der Kreisscheibe.

Leiten Sie daraus einen weiteren Beweis für den Satz von der Gebietstreue her.