Übungsblatt 7
Funktionentheorie, Sommersemester 2013

Dr.habil. Emanuel Scheidegger
Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: 14. Juni 2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Zeigen Sie, dass f in z_0 genau dann

1. eine hebbare Singularität hat, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$,
2. einen Pol der Ordnung $k > 0$ hat, wenn $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$,
3. eine wesentliche Singularität hat, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist die Singularität $a \in \mathbb{C}$ der holomorphen Funktion f nicht hebbar, dann hat $exp \circ f$ eine wesentliche Singularität in dem Punkt a.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f jeweils ein in $\mathbb{C}$ dichtes Gebiet $U \subset \mathbb{C}$, so dass f auf U holomorph ist. Bestimmen Sie die Lage aller Nullstellen, Pole sowie der wesentlichen Singularitäten von f in $\mathbb{C}$.

1. $f(z) = \tan(z)$,
2. $f(z) = \frac{\sin(z)}{\sinh(z)}$,
3. $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$,
4. $f(z) = \exp(\frac{1}{1+z^2})$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für die auf $\mathbb{C}$ definierte Funktion

$$f(z) = \frac{2z-1}{z(z-1)(z-2)}$$

die Laurentreihenentwicklung um den Pol bei $z_0 = 2$ für

1. $0 < |z-2| < 1$,
2. $1 < |z-2| < 2$,
3. $|z-2| > 2$.